

بِسْمِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

پانچ تمرین های فصل پنجم کتاب پژوهش علمیاتی دکتر مهرگان  
(تمرین فصل مدل سازی)

نویسندگان: رضا محمدیان

امیر مزیکی

دانلود شده از

[www.Rasad-ATU.ir](http://www.Rasad-ATU.ir)

سایت انجمن علمی مدیریت صنعتی دانشگاه علامه طباطبائی

## توجه: برای این مسائل به ساخت مدل اکتفا کنید.

۱- یک شرکت تولیدی می‌خواهد برای حداکثر سودبری، میزان تولید هر یک از سه محصول متفاوتی را مشخص کند که می‌تواند با منابع محدود خود تولید کند. نیروی انسانی، مواد مورد نیاز و میزان سود هر واحد از محصول تولید شده مطابق جدول زیر است. مدل این مسئله را بنویسید.

منابع	محصول ۱	محصول ۲	محصول ۳	موجودی
نیروی انسانی (نفر-ساعت)	۵	۲	۴	۲۴۰
مواد اولیه (کیلو-ساعت)	۴	۶	۳	۴۰۰
سود (تومان)	۳	۵	۲	

هدف: حداکثر سازی سود

- تعریف متغیر تصمیم:

$$X_i: \text{تعداد محصول } i \text{ تولید شده} \quad (i=1,2,3) \quad \{X_1 = \text{محصول ۱}, X_2 = \text{محصول ۲}, X_3 = \text{محصول ۳}\}$$

- تعریف تابع هدف:

$$\text{Max } Z = 3X_1 + 5X_2 + 2X_3$$

- محدودیت‌ها:

S.t.

$$5X_1 + 2X_2 + 4X_3 \leq 240 \quad (\text{محدودیت مربوط به نیروی انسانی})$$

$$4X_1 + 6X_2 + 3X_3 \leq 400 \quad (\text{محدودیت مربوط به مواد اولیه})$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0, \quad X_i \in \mathbb{Z}$$

۲- بخش رژیم غذایی یک بیمارستان باید برنامه صبحانه بیماران تحت رژیم را تهیه کند و میزان معینی ویتامین A و B در این برنامه بگنجانند. برنامه باید با حداقل هزینه ممکن تهیه شود. مواد اصلی صبحانه به منظور تأمین ویتامین A و B، تخم مرغ، گوشت و نان است. جدول زیر میزان ویتامین موجود در هر یک از این مواد غذایی را نشان می‌دهد.

ویتامین	ویتامین موجود			
	تخم مرغ / میلی گرم	گوشت / میلی گرم	نان / میلی گرم	حداقل نیاز روزانه / میلی گرم
A	۲	۴	۱	۱۶
B	۳	۲	۱	۱۲

قیمت هر تخم مرغ ۱۱ و هر ۱۰۰ گرم گوشت ۶۳ و هر نان ۳ تومان می‌باشد. بخش رژیم غذایی می‌خواهد بداند به چه میزان از این مواد در تهیه صبحانه استفاده کند تا هزینه حداقل شود.

هدف: حداقل سازی هزینه‌ها

- تعریف متغیر تصمیم:

$$X_1 = \text{تعداد تخم مرغ‌های مصرفی}$$

$$X_2 = \text{میزان گوشت مصرفی (هر ۱۰۰ گرم معادل ۱ واحد گوشت می‌باشد)}$$

$$X_3 = \text{تعداد نان مصرفی}$$

- تعریف تابع هدف:

$$\text{Min } Z = 11X_1 + 63X_2 + 3X_3$$

- محدودیت‌ها:

S.t.

$$2X_1 + 4X_2 + X_3 \geq 16 \quad (\text{محدودیت مربوط به ویتامین «آ»})$$

$$3X_1 + 2X_2 + X_3 \geq 12 \quad (\text{محدودیت مربوط به ویتامین «ب»})$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0, \quad X_i \in \mathbb{Z}$$

۳- برای ساختن آلیاژی با ترکیب ۳۰٪ سرب ، ۳۰٪ روی و ۴۰٪ قلع از هفت نوع آلیاژ موجود در بازار با ترکیبات مختلف ارائه شده در جدول زیر استفاده می‌شود.

اسم آلیاژ نوع فلز	A	B	C	D	E	F	G
٪ سرب	۱۰	۱۰	۴۰	۶۰	۳۰	۲۰	۵۰
٪ روی	۱۰	۳۰	۵۰	۳۰	۳۰	۳۰	۴۰
٪ قلع	۸۰	۶۰	۱۰	۱۰	۴۰	۵۰	۱۰
قیمت واحد	۴۱	۴۳	۵۸	۶۰	۷۶	۷۳	۶۹

از کدام یک از آلیاژهای موجود در بازار باید در تولید آلیاژ جدید استفاده شود تا ضمن تهیه آلیاژ مورد نیاز ، هزینه‌ها حداقل گردد؟

- تعریف متغیر تصمیم:

$X_i$ : میزان آلیاژ ذوب شده نوع  $i$  برای تولید آلیاژ اصلی

( $i=1$  A ;  $2$  B ;  $3$  C ;  $4$  D ;  $5$  E ;  $6$  F ;  $7$  G )

- تعریف تابع هدف:

$$\text{Min } Z = 41X_1 + 43X_2 + 58X_3 + 60X_4 + 76X_5 + 73X_6 + 69X_7$$

• محدودیت‌ها :

S.t.

$$\frac{0.1X_1 + 0.1X_2 + 0.4X_3 + 0.6X_4 + 0.3X_5 + 0.2X_6 + 0.5X_7}{X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6 + X_7} = 0.3$$

$$\frac{0.1X_1 + 0.3X_2 + 0.5X_3 + 0.3X_4 + 0.3X_5 + 0.3X_6 + 0.4X_7}{X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6 + X_7} = 0.3$$

$$\frac{0.8X_1 + 0.6X_2 + 0.1X_3 + 0.1X_4 + 0.4X_5 + 0.4X_6 + 0.1X_7}{X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6 + X_7} = 0.4$$

$$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7 \geq 0, X_i \in \mathbb{Z}$$

۴- یک کارخانه تولید کننده لوازم خانگی، یخچال‌های تولیدی خود را ماهانه از سه انبار به سه فروشگاه حمل می‌کند میزان موجودی ماهانه انبارها و مقدار تقاضای ماهانه هر فروشگاه مطابق جدول زیر است:

انبار	موجودی	فروشگاه	مقدار تقاضا
شماره ۱	۲۰۰	A	۱۰۰
شماره ۲	۱۵۰	B	۳۰۰
شماره ۳	۳۰۰	C	۲۵۰

هزینه حمل هر یخچال از انبار به فروشگاه در جدول زیر ارائه شده است.

از انبار	به فروشگاه		
	C	B	A
۱	۱۲	۵	۱۰
۲	۱۵	۹	۴
۳	۶	۸	۱۵

این کارخانه باید از کدام انبار به کدام فروشگاه و به چه میزان یخچال ارسال کند تا ضمن تأمین تقاضای هر فروشگاه، هزینه حمل و نقل حداقل شود؟

هدف: حداقل سازی هزینه‌ها

• تعریف متغیر تصمیم :

$X_{ij}$ : تعداد یخچالی که از انبار  $i$  به فروشگاه  $j$  فرستاده می‌شود ( $i=1,2,3$ ) ( $j=1,2,3$ )

•  $X_{11}$  = تعداد یخچالی که از انبار ۱ به فروشگاه ۱ فرستاده می‌شود

•  $X_{12}$  = تعداد یخچالی که از انبار ۱ به فروشگاه ۲ فرستاده می‌شود

•  $X_{13}$  = تعداد یخچالی که از انبار ۱ به فروشگاه ۳ فرستاده می‌شود

• و ...

- تعریف تابع هدف:

$$\text{Min } Z = 10 X_{11} + 5 X_{12} + 12 X_{13} + 4 X_{21} + 9 X_{22} + 15 X_{23} + 15 X_{31} + 8 X_{32} + 6 X_{33}$$

- محدودیت‌ها:

S.t.

$$X_{11} + X_{12} + X_{13} \leq 200 \quad (\text{محدودیت مربوط به موجودی انبار ۱})$$

$$X_{21} + X_{22} + X_{23} \leq 150 \quad (\text{محدودیت مربوط به موجودی انبار ۲})$$

$$X_{31} + X_{32} + X_{33} \leq 300 \quad (\text{محدودیت مربوط به موجودی انبار ۳})$$

$$X_{11} + X_{21} + X_{31} \geq 100 \quad (\text{محدودیت مربوط به تقاضای فروشگاه ۱})$$

$$X_{12} + X_{22} + X_{32} \geq 300 \quad (\text{محدودیت مربوط به تقاضای فروشگاه ۲})$$

$$X_{13} + X_{23} + X_{33} \geq 250 \quad (\text{محدودیت مربوط به تقاضای فروشگاه ۳})$$

$$X_{11}, X_{12}, X_{13}, X_{21}, X_{22}, X_{23}, X_{31}, X_{32}, X_{33} \geq 0, X_{ij} \in \mathbb{Z}$$

۵- مدیر تولید یک کارخانه در صدد برنامه ریزی برای پنج ماه آینده است. در اوقات عادی، میزان تولید ماهانه این کارخانه با توجه به سوابق معادل ۲۰۰۰ واحد است. همچنین میزان تولید در ساعات اضافه کاری در طول هر ماه معادل ۶۰۰ واحد است.

هزینه تولید هر واحد محصول در ساعت عادی و اضافه کار به ترتیب معادل ۱۵ و ۱۰ تومان است. میزان محصول مورد نیاز جهت پاسخگویی به قرارداد های فروش به شرح زیر است:

ماه	۱	۲	۳	۴	۵
محصول مورد تقاضا	۱۲۰۰	۲۱۰۰	۲۴۰۰	۳۰۰۰	۴۰۰۰

هزینه نگهداری هر واحد محصول برای یک ماه معادل ۲ تومان است. مدیریت می‌خواهد در پایان ماه پنجم، موجودی‌اش به صفر برسد. برنامه تولید ماهانه این کارخانه را به گونه ای تعیین کنید که میزان کل هزینه حداقل شود.

هدف: حداقل سازی هزینه‌ها

- تعریف متغیر تصمیم:

$$X_i = \text{تعداد کالایی که در ساعات عادی در ماه } i \text{ ام تولید می‌شود. } (i=1,2,3,4,5)$$

$$Y_i = \text{تعداد کالایی که در ساعات اضافه کاری در ماه } i \text{ ام تولید می‌شود. } (i=1,2,3,4,5)$$

$$I_i = \text{تعداد کالایی که در انتهای ماه } i \text{ ام انبار می‌شود. } (j=1,2,3,4,5)$$

- تعریف تابع هدف:

$$\text{Min } Z = 10(X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5) + 15(Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4 + Y_5) + 2(I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5)$$

• محدودیت‌ها :

S.t.

$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 \leq 2000$  (محدودیت مربوط به حداکثر تعداد تولید در ساعت عادی)

$Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Y_5 \leq 600$  (محدودیت مربوط به حداکثر تعداد تولید در ساعت اضافه کاری)

$= [\text{فروش (تقاضا)}] - [\text{تولید در ساعات اضافه کاری این ماه}] + [\text{تولید در ساعات عادی این ماه}] + [\text{موجودی اول دوره (موجودی انبار در ماه قبل)}]$   
 $[\text{موجودی پایان دوره (موجودی انبار در انتها ماه)}]$

$$0 + X_1 + Y_1 - I_1 = 1200 \quad (\text{ماه ۱})$$

$$I_1 + X_2 + Y_2 - I_2 = 2100 \quad (\text{ماه ۲})$$

$$I_2 + X_3 + Y_3 - I_3 = 2400 \quad (\text{ماه ۳})$$

$$I_3 + X_4 + Y_4 - I_4 = 3000 \quad (\text{ماه ۴})$$

$$I_4 + X_5 + Y_5 - I_5 = 4000 \quad (\text{ماه ۵})$$

$$I_5 = 0 \quad (\text{مانده پایان دوره می‌بایست ۰ باشد})$$

$$X_i, Y_i, I_i \geq 0, \quad X_i, Y_i, I_i \in \mathbb{Z}$$

۶- یک موسسه تولیدی دو نوع ضبط صوت در اندازه های بزرگ و کوچک تولید می‌کند. تقاضای پیش بینی شده برای سه ماهه اول سال در جدول زیر نشان داده شده است.

تقاضای ماهانه برای ضبط صوت		ماه
کوچک	بزرگ	
۴۰۰	۲۰۰	فروردین
۵۰۰	۳۲۰	اردیبهشت
۵۵۰	۴۰۰	خرداد

با توجه به دوره کوتاه مدت برنامه ریزی امکان افزایش ظرفیت وجود ندارد و تولید ماهانه محدود است. در زمان عادی کار میزان تولید ضبط بزرگ ۱۲۰۰ عدد و در زمان اضافه کاری ۲۴۰ عدد در ماه است. در ازای عدم ساخت هر واحد ضبط بزرگ می‌توان ۲ عدد ضبط کوچک ساخت.

جدول زیر هزینه های تولید در ساعات عادی و اضافه کاری برای ساخت ضبط کوچک و بزرگ و همین طور هزینه انبار داری آن‌ها را نشان می‌دهد. به تولیداتی که در همین ماه به فروش می‌رسند هزینه انبار داری تعلق نمی‌گیرد.

اندازه ضبط		هزینه تولید و انبار داری
کوچک	بزرگ	
۶۰	۸۰	هزینه تولید در ساعات عادی
۷۰	۹۵	هزینه تولید در ساعات اضافه کاری
۳	۵	هزینه انبار داری (هر عدد)

هدف برآورده کردن تقاضاها با صرف کمترین هزینه‌هاست. مدل برنامه ریزی خطی این مسئله را بسازید.

- تعریف متغیر تصمیم:

$$X_{ijt} = \text{تعداد ضبط صوت نوع } i \text{ که در ساعت نوع } j \text{ و در ماه } t \text{ تولید می‌گردد}$$

$$(t = 1; 2; 3) ; (j = 1 \text{ عادی} ; 2 \text{ اضافه کاری} ; 3) ; (i = 1 \text{ کوچک} ; 2 \text{ بزرگ})$$

$$I_{it} = \text{تعداد ضبط صوت نوع } i \text{ که در ماه } t \text{ تولید می‌شود.}$$

$$(t = 1; 2; 3) ; (i = 1 \text{ کوچک} ; 2 \text{ بزرگ})$$

- تعریف تابع هدف:

$$\text{Min } Z = 60 (X_{111} + X_{112} + X_{113}) + 80 (X_{211} + X_{212} + X_{213}) + 70 (X_{121} + X_{122} + X_{123}) + 95 (X_{221} + X_{222} + X_{223}) + 3 (I_{11} + I_{12} + I_{13}) + 5 (I_{21} + I_{22} + I_{23})$$

- محدودیت‌ها:

S.t.

$$[\text{فروش (تقاضا)}] - [\text{تولید در ساعات اضافه کاری این ماه}] + [\text{تولید در ساعات عادی این ماه}] + [\text{موجودی اول دوره (موجودی انبار در ماه قبل)}]$$

$$= [\text{موجودی پایان دوره (موجودی انبار در انتها ماه)}]$$

$$0 + X_{111} + X_{211} - I_{11} = 400 \quad (\text{تولید ضبط کوچک در ماه ۱})$$

$$I_{11} + X_{112} + X_{212} - I_{12} = 500 \quad (\text{تولید ضبط کوچک در ماه ۲})$$

$$I_{12} + X_{113} + X_{213} - I_{13} = 550 \quad (\text{تولید ضبط کوچک در ماه ۳})$$

$$0 + X_{211} + X_{121} - I_{21} = 200 \quad (\text{تولید ضبط بزرگ در ماه ۱})$$

$$I_{21} + X_{212} + X_{122} - I_{22} = 320 \quad (\text{تولید ضبط بزرگ در ماه ۲})$$

$$I_{22} + X_{213} + X_{123} - I_{23} = 400 \quad (\text{تولید ضبط بزرگ در ماه ۳})$$

$$X_{211} + \frac{1}{4} X_{111} \leq 1200 \quad (\text{محدودیت مربوط به حداکثر تعداد تولید در ساعات عادی در ماه ۱})$$

$$X_{212} + \frac{1}{4} X_{112} \leq 1200 \quad (\text{محدودیت مربوط به حداکثر تعداد تولید در ساعات عادی در ماه ۲})$$

$$\begin{aligned}
 X_{213} + \frac{1}{4} X_{113} &\leq 1200 & (\text{محدودیت مربوط به حداکثر تعداد تولید در ساعات عادی در ماه ۳}) \\
 X_{221} + \frac{1}{4} X_{121} &\leq 240 & (\text{محدودیت مربوط به حداکثر تعداد تولید در ساعات اضافه کار در ماه ۱}) \\
 X_{222} + \frac{1}{4} X_{122} &\leq 240 & (\text{محدودیت مربوط به حداکثر تعداد تولید در ساعات اضافه کار در ماه ۲}) \\
 X_{223} + \frac{1}{4} X_{123} &\leq 240 & (\text{محدودیت مربوط به حداکثر تعداد تولید در ساعات اضافه کار در ماه ۳}) \\
 I_{11} = I_{13} &= 0
 \end{aligned}$$

(به دلیل آنکه برنامه ریزی برای مدت ۳ ماه می‌باشد و هدف حداقل کردن هزینه‌ها است مسئله را به گونه ای مدل سازی می‌کنیم تا در انتهای ماه سوم هیچ کالایی در انبار وجود نداشته باشد)

$$X_{ijt}, I_{it} \geq 0, \quad X_{ijt}, I_{it} \in \mathbb{Z}$$

۷- موجودی نقد یک نفر سرمایه گذار ۱۰۰ واحد پول در شنبه است. او به روش زیر می‌تواند سرمایه گذاری خود را انجام دهد: به ازای هر مقدار سرمایه گذاری در یک روز و نصف آن مقدار در روز بعد، فردای آن روز دو برابر مقدار سرمایه گذاری روز اول را دریافت نماید.

سیاست بهینه سرمایه گذاری برای این فرد را به گونه ای تعیین کنید که بتواند پول خود را در پنج شنبه به حداکثر برساند. (توضیح: روز های پنج شنبه و جمعه تعطیل فرض شده است. امکان سرمایه گذاری در این دو روز وجود ندارد.) مدل برنامه ریزی سرمایه گذاری را بنویسید.

هدف: حداکثر سازی درآمد (حداکثر سازی سود)

- تعریف متغیر تصمیم:

$$X_i = \text{میزان سرمایه گذاری در روز } i \text{ ام. } (i=0,1,2,3)$$

$$I_i = \text{میزان پس انداز در انتهای روز } i \text{ ام. } (j=0,1,2,3,4)$$

- تعریف تابع هدف:

$$\text{Max } Z = 2X_3 + I_4$$

- محدودیت‌ها:

S.t.

$$[\text{پس انداز امروز (مانده پول پایان امروز)}] = [\text{سرمایه گذاری های امروز}] - [\text{پس انداز روز قبل (مانده پول دیروز)}] + [\text{درآمد سرمایه گذاری}]$$

$$0 + 100 - (X_0) = I_1 \quad (\text{شنبه})$$

$$0 + I_1 - \left(\frac{X_1}{4} + X_1\right) = I_2 \quad (\text{یکشنبه})$$

$$2X_1 + I_2 - \left(\frac{X_2}{4} + X_2\right) = I_3 \quad (\text{دوشنبه})$$

$$2X_2 + I_3 - \left(\frac{X_3}{4} + X_3\right) = I_4 \quad (\text{سه شنبه})$$



$$2X_2 + I_2 - \left(\frac{x_2}{4} + \right) = I_4 \quad (\text{چهارشنبه})$$

✓ «با توجه به اینکه روز پنج شنبه و جمعه شرکت سرمایه گذاری تعطیل می‌باشد و ما نمی‌توانیم  $\frac{x_4}{4}$  را سرمایه گذاری کنیم پس چهار شنبه نیز پولی سرمایه گذاری نمی‌کنیم»

۸- واحد آموزش یک فروشگاه زنجیره ای به منظور آموزش مدیران فروش تازه استخدام خود یک برنامه پنج روزه را می‌خواهد طراحی کند بدین منظور چهار نوع فعالیت را برای آموزش مدیران در نظر گرفته است:

۱. توضیح مطالب مورد نیاز توسط استاد (تدریس)

۲. فعالیت‌های کارگاهی

۳. حل قضایای آموزشی

۴. بازی‌های مدیریتی

جدول زیر نتیجه بررسی‌های واحد آموزشی در تعیین درصد فعال یا غیر فعال بودن کار آموزان را در هر یک از فعالیت‌های فوق و هزینه اجرای آن‌ها را نشان می‌دهد:

فعالیت‌های آموزشی	درصد فعال بودن	درصد غیر فعال بودن	هزینه در هر روز
تدریس	۱۰	۹۰	۴۰۰
کارگاه	۴۰	۶۰	۲۰۰
حل قضایای آموزشی	۱۰۰	۰	۷۵
بازی‌های مدیریتی	۶۰	۴۰	۱۰۰

به منظور ایجاد توازن در برنامه، برنامه ریزان می‌خواهند نوع فعالیت‌های آموزشی به گونه ای باشد که بیش از سه روز صرف مواد فعال یا غیر فعال آموزشی در برنامه نگردد. ضمناً حداقل زمان قابل قبول برای هر یک از فعالیت‌های چهارگانه آموزشی نباید کمتر از نصف روز باشد.

کل بودجه آموزشی برای این دوره ۱۵۰۰ بوده است. در صورتی که سود تخمین زده شده ناشی از هر روز آموزش هر کدام از این چهار فعالیت در یک هفته به ترتیب معادل ۳۲۰۰، ۲۰۰۰، ۲۰۰۰، ۲۰۰ باشد مدل تنظیم برنامه آموزشی این فروشگاه را بسازید.

هدف: حداکثر سازی سود

• تعریف متغیر تصمیم:

$X_i$ : میزان روزی که از فعالیت  $i$  استفاده می‌شود ( $i=1,2,3$ )

- $X_1$  = میزان روزی که به کار آموزان تدریس می‌شود.
- $X_2$  = میزان روزی که کارگاه برگزار می‌شود.
- $X_3$  = میزان روزی که کارآموزان به حل قضایای آموزشی می‌پردازند.
- $X_4$  = میزان روزی که کارآموزان بازی‌های مدیریتی انجام می‌دهند.

• تعریف تابع هدف:

$$\text{Max } Z = 3200 X_1 + 2000 X_2 + 200 X_3 + 200 X_4$$

- محدودیت‌ها :

S.t.

$$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 \leq 5 \quad (\text{محدودیت مربوط به مدت برنامه (برنامه ۵ روزه می باشد)})$$

$$0.1 X_1 + 0.4 X_2 + X_3 + 0.6 X_4 \leq 3 \quad (\text{محدودیت مربوط به میزان روز، برنامه های فعال آموزشی})$$

$$0.9 X_1 + 0.6 X_2 + 0.4 X_4 \leq 3 \quad (\text{محدودیت مربوط به میزان روز، برنامه های غیر فعال آموزشی})$$

$$400 X_1 + 200 X_2 + 70 X_3 + 100 X_4 \leq 1500 \quad (\text{محدودیت مربوط به بودجه برنامه})$$

$$X_1, X_2, X_3, X_4 \geq \frac{1}{4} \quad (\text{محدودیت مربوط به حداقل زمان هر فعالیت})$$

$$X_i \in \mathbb{R}$$

۹- کارگاهی دارای یک ماشین مته و یک ماشین پرس است که برای تولید محصولی به کار می‌رود که از موتناژ دو قطعه ۱ و ۲ تشکیل می‌شود. زمان لازم برای تولید هر قطعه به وسیله هر کدام از ماشین‌ها چنین است :

زمان تولید (قطعه / دقیقه)		قطعه
ماشین پرس	ماشین مته	
۴	۳	۱
۳	۵	۲

قصد بر آن است که تعادل کار بر روی ماشین‌ها طوری پیاده شود که هیچ کدام از آن‌ها ۳۰ دقیقه بیش از دیگری در روز کار نکنند. زمان کار مفید را بین ماشین‌ها طوری تقسیم کنید که تعداد کل محصولات موتناژی تکمیل شده در ۸ ساعت کاری در روز حداکثر شود.

هدف: حداکثر سازی سود

- تعریف متغیر تصمیم :

$X_{ij}$ : تعداد قطعه نوع  $i$  که توسط ماشین  $j$  تولید می‌شود

( ماشین پرس ۲، ماشین مته ۱ ) ;  $(j=1, 2)$  ;  $(i=1, 2)$

$Y$ : تعداد محصول کامل تولید شده

- تعریف تابع هدف:

$$\text{Max } Z = y$$

- محدودیت‌ها :

S.t.

$$Y = \min(x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}) \Rightarrow \begin{cases} y \leq x_{11} \\ y \leq x_{12} \\ y \leq x_{21} \\ y \leq x_{22} \end{cases}$$

(محدودیت مربوط به عبارت هیچ کدام از ماشین‌ها ۳۰ دقیقه بیشتر از دیگری کار نکند)  $|(3x_{11} + 5x_{12}) - (4x_{21} + 3x_{22})| \leq 30$

(محدودیت مربوط به حداکثر ساعت تولید در یک روز برای ماشین ۱)  $3x_{11} + 5x_{21} \leq 8 \times 60$

(محدودیت مربوط به حداکثر ساعت تولید در یک روز برای ماشین ۲)  $4x_{12} + 3x_{22} \leq 8 \times 60$

۱۰- شرکتی دو نوع کلاه تولید می‌کند. مدت زمان تولید کلاه اول دو برابر کلاه نوع دوم است. اگر تمام کلاه‌ها از نوع دوم باشد، شرکت می‌تواند جمعاً ۵۰۰ کلاه تولید کند. فرض کنید که حداکثر فروش روزانه کلاه‌ها نوع اول و دوم در بازار ۱۵۰ و ۲۵۰ عدد و سود حاصل از فروش آن‌ها به ترتیب ۸ و ۵ تومان است.

مطلوبست: تعداد کلاه‌هایی که باید از نوع اول و دوم تولید شود تا سود کل حداکثر شود.

هدف: حداکثر سازی سود

• تعریف متغیر تصمیم:

$\{X_i : \text{تعداد کلاه } i \text{ تولید شده } (i=1, 2), X_1 = \text{تعداد کلاه نوع ۱ تولید شده}, X_2 = \text{تعداد کلاه نوع ۲ تولید شده}\}$

• تعریف تابع هدف:

$$\text{Max } Z = 8X_1 + 5X_2$$

• محدودیت‌ها:

S.t.

مدت زمان تولید کلاه ۱، دو برابر مدت زمان تولید کلاه ۲ می‌باشد، پس در زمان برابر میزان تولید کلاه ۲، دو برابر تعداد کلاه نوع ۱ می‌باشد یعنی  $2X_1 = X_2$

(محدودیت مربوط به حداکثر فروش کلاه نوع ۱)  $X_1 \leq 150$

(محدودیت مربوط به حداکثر فروش کلاه نوع ۲)  $X_2 \leq 250$

(محدودیت مربوط به حداکثر ظرفیت تولید)  $2X_1 + X_2 \leq 500$

$X_1, X_2 \geq 0, X_i \in \mathbb{Z}$

۱۱- تولید کننده ای سه مدل (۱ و ۲ و ۳) از فرآورده های معینی با دو ماده خام A و B تولید می‌کند. موجودی این دو ماده به ترتیب ۲۰۰۰ و ۳۰۰۰ واحد است. مواد خام مورد نیاز برای هر واحد از سه مدل در جدول زیر داده شده است.

ماده خام	مقدار مورد لزوم برای هر واحد از مدل داده شده		
	۱	۲	۳
A	۲	۳	۵
B	۴	۲	۷

زمان کار مورد نیاز برای هر واحد از مدل ۱ دو برابر زمان کار مدل ۲ و سه برابر زمان کار مدل ۳ است. تمام نیروی کار خانه می‌تواند معادل ۷۰۰ واحد از مدل ۱ تولید کند برآوردی از بازار نشان می‌دهد که حداقل تقاضا برای سه مدل به ترتیب ۲۰۰، ۲۰۰ و ۱۵۰ واحد است. با وجود این، نسبت‌های تعداد واحد تولید شده باید برابر ۳:۲:۵ باشند. فرض کنید که سود هر واحد از مدل‌های ۱ و ۲ و ۳ به ترتیب برابر ۲۰ و ۳۰ و ۵۰ تومان باشد. مسئله را به صورت یک مدل برنامه ریزی خطی فرموله کنید تا بتوانید تعداد واحدهایی از هر فرآورده را، که سود کل را حداکثر می‌سازد را، بدست آورید.

- تعریف متغیر تصمیم:

$X_i$ : میزان ماده خام نوع  $i$  مصرفی برای تولید محصول ( $i = 1, 2, 3$ )

$Y_i$ : میزان محصول نهایی نوع  $i$  تولید شده ( $i = 1, 2, 3$ )

- تعریف تابع هدف:

$$\text{Max } Z = 30Y_1 + 20Y_2 + 50Y_3$$

- محدودیت‌ها:

S.t.

$$2X_1 + 3X_2 + 5X_3 \leq 2000$$

(محدودیت مربوط به مصرف ماده ۱)

$$4X_1 + 2X_2 + 7X_3 \leq 3000$$

(محدودیت مربوط به مصرف ماده ۲)

$$Y_1 \geq 200$$

$$Y_2 \geq 200$$

$$Y_3 \geq 150 \quad (\text{محدودیت مربوط به تقاضای کالای نهایی})$$

$$\frac{Y_1}{5} = \frac{Y_2}{2} = \frac{Y_3}{3}$$

(محدودیت مربوط به نسبت تولید)

$$Y_1 + \frac{1}{2}Y_2 + \frac{1}{3}Y_3 \leq 700$$

(محدودیت مربوط به حداکثر ظرفیت تولیدی کارخانه)

$$Y_1 = \min\left(\frac{X_1}{2}, \frac{X_2}{4}\right) \Rightarrow \begin{cases} Y_1 \leq \frac{X_1}{2} \\ Y_1 \leq \frac{X_2}{4} \end{cases} \quad (\text{محدودیت مربوط به تولید محصول ۱})$$

$$Y_2 = \min\left(\frac{X_1}{3}, \frac{X_2}{2}\right) \Rightarrow \begin{cases} Y_2 \leq \frac{X_1}{3} \\ Y_2 \leq \frac{X_2}{2} \end{cases} \quad (\text{محدودیت مربوط به تولید محصول ۲})$$

$$Y_3 = \min\left(\frac{X_1}{5}, \frac{X_2}{7}\right) \Rightarrow \begin{cases} Y_3 \leq \frac{X_1}{5} \\ Y_3 \leq \frac{X_2}{7} \end{cases} \quad (\text{محدودیت مربوط به تولید محصول ۳})$$

$$X_i, Y_i \geq 0, \quad X_i, Y_i \in \mathbb{Z}$$

۱۲- رستورانی به منظور ارائه خدمات در هر شبانه روز به تعدادی خدمت کار به صورت زیر نیازمند است :

اوقات روز	حداقل تعداد مورد نیاز
۲-۶	۴
۶-۱۰	۸
۱۰-۱۴	۱۰
۱۴-۱۸	۷
۱۸-۲۲	۱۲
۲۲-۲۴	۴

هر خدمتکار هشت ساعت متوالی در روز کار می کند. هدف تعیین حداقل تعداد خدمتکار مورد نیاز است که احتیاجات فوق را برآورده سازد. مسئله را به صورت یک برنامه ریزی خطی فرموله کنید.

۲	-	۶	-	۱۰	-	۱۴	-	۱۸	-	۲۲	-	۲۴
X <sub>۱</sub> تعداد کارگری که کار خود را از ۲ شرع می کنند												
		X <sub>۲</sub> تعداد کارگری که کار خود را از ۶ شرع می کنند										
			X <sub>۳</sub> تعداد کارگری که کار خود را از ۱۰ شرع می کنند									
					X <sub>۴</sub> تعداد کارگری که کار خود را از ۱۴ شرع می کنند							
							X <sub>۵</sub> تعداد کارگری که کار خود را از ۱۸ شرع می کنند					

• تعریف متغیر تصمیم :

- $X_1$ : تعداد خدمتکاری که کار خود را از ساعت ۲ آغاز و ۱۰ به پایان می رسانند.
- $X_2$ : تعداد خدمتکاری که کار خود را از ساعت ۶ آغاز و ۱۴ به پایان می رسانند.
- $X_3$ : تعداد خدمتکاری که کار خود را از ساعت ۱۰ آغاز و ۱۸ به پایان می رسانند.
- $X_4$ : تعداد خدمتکاری که کار خود را از ساعت ۱۴ آغاز و ۲۲ به پایان می رسانند.
- $X_5$ : تعداد خدمتکاری که کار خود را از ساعت ۱۸ آغاز و ۲۴ به پایان می رسانند.

• تعریف تابع هدف:

$$\text{Min } C = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5$$

• محدودیت ها :

S.t.

$$X_1 \geq 4 \quad (\text{خدمت کار مورد نیاز از ساعت ۲ تا ۶})$$

$$X_1 + X_2 \geq 8 \quad (\text{خدمت کار مورد نیاز از ساعت ۶ تا ۱۰})$$

$$X_2 + X_3 \geq 10 \quad (\text{خدمت کار مورد نیاز از ساعت ۱۰ تا ۱۴})$$

$$X_3 + X_4 \geq 7 \quad (\text{خدمت کار مورد نیاز از ساعت ۱۴ تا ۱۸})$$

$$X_4 + X_5 \geq 12 \quad (\text{خدمت کار مورد نیاز از ساعت ۱۸ تا ۲۲})$$

$$X_5 \geq 4 \quad (\text{خدمت کار مورد نیاز از ساعت ۲۲ تا ۲۴})$$

$$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 \geq 0, X_i \in \mathbb{Z}$$

۱۳- موسسه ای دارای سه کارخانه مجزا است که در حال حاضر از ظرفیت تولیدی آنها به طور کامل استفاده نمی‌شود. هر سه کارخانه قابلیت تولید محصول معینی را دارند، و مدیریت مصمم است تا بخشی از ظرفیت‌های بلا استفاده موجود را به کار اندازد. محصول را می‌توان در سه اندازه کوچک، متوسط و بزرگ ساخت که سود حاصل از آنها به ترتیب معادل ۱۰۰ و ۱۲۰ و ۱۴۰ تومان است. با توجه به ظرفیت آزاد و نیروی انسانی موجود در این کارخانه و صرفه نظر از اندازه محصول هر یک از کارخانه‌های ۱، ۲ و ۳ می‌توانند روزانه به ترتیب ۷۵۰ و ۹۰۰ و ۴۵۰ واحد از محصول را تولید کنند. لیکن فضای انبار محصول نیم ساخته کارخانه‌ها محدود است.

در کارخانه ۱ و ۲ و ۳ به ترتیب معادل ۱۳۰۰۰ و ۱۲۰۰۰ و ۵۰۰۰ فوت مربع انبار محصول نیم ساخته برای تولید روزانه وجود دارد. هر واحد بزرگ، متوسط و کوچک محصول به ترتیب معادل ۲۰ و ۱۵ و ۱۲ فوت مربع را اشغال می‌کند.

پیش بینی فروش نشان می‌دهد که هر روز می‌توان به ترتیب معادل ۹۰۰ و ۱۲۰۰ و ۷۵۰ واحد از محصول کوچک و متوسط و بزرگ را به فروش رساند.

مدیر به منظور ایجاد توازن کاری و تا حدودی حفظ انعطاف پذیری تصمیم دارد حجم تولید جدید را بین سه کارخانه به نسبت نیروی انسانی و ظرفیت آزاد فعلی آنها را تقسیم کند هدف مدیریت این است که میزان تولید هر یک از اندازه‌های محصول در هر یک از کارخانه‌ها را طوری تعیین کند که حداکثر سود را بدست بیاورد.

• تعریف متغیر تصمیم:

$X_{ij}$ : تعداد محصول  $i$  که در کارخانه  $j$  تولید می‌شود

(بزرگ ۳؛ متوسط ۲؛ کوچک ۱)  $(I=1, 2, 3)$   $(j=1, 2, 3)$

• تعریف تابع هدف:

$$\text{Max } Z = 100(X_{11} + X_{12} + X_{13}) + 120(X_{21} + X_{22} + X_{23}) + 140(X_{31} + X_{32} + X_{33})$$

• محدودیت‌ها:

S.t.

$$X_{11} + X_{21} + X_{31} \leq 750 \quad (\text{محدودیت مربوط به ظرفیت ساخت کارخانه ۱})$$

$$X_{r1} + X_{r2} + X_{r3} \leq 900 \quad (\text{محدودیت مربوط به ظرفیت ساخت کارخانه ۲})$$

$$X_{r1} + X_{r2} + X_{r3} \leq 450 \quad (\text{محدودیت مربوط به ظرفیت ساخت کارخانه ۳})$$

$$X_{11} + X_{12} + X_{13} \geq 900 \quad (\text{محدودیت مربوط به تقاضای کالای کوچک})$$

$$X_{r1} + X_{r2} + X_{r3} \geq 1200 \quad (\text{محدودیت مربوط به تقاضای کالای متوسط})$$

$$X_{r1} + X_{r2} + X_{r3} \geq 750 \quad (\text{محدودیت مربوط به تقاضای کالای بزرگ})$$

$$12X_{11} + 15X_{r1} + 20X_{r1} \geq 13000 \quad (\text{محدودیت مربوط به ظرفیت انبار کارخانه ۱})$$

$$12X_{12} + 15X_{r2} + 20X_{r2} \geq 13000 \quad (\text{محدودیت مربوط به ظرفیت انبار کارخانه ۲})$$

$$12X_{13} + 15X_{r3} + 20X_{r3} \geq 13000 \quad (\text{محدودیت مربوط به ظرفیت انبار کارخانه ۳})$$

$$\frac{X_{11} + X_{21} + X_{31}}{750} = \frac{X_{11} + X_{21} + X_{31}}{900} = \frac{X_{11} + X_{21} + X_{31}}{450}$$

(محدودیت مربوط به توازن حجم تولید)

۱۴- یک شرکت تبلیغاتی می‌خواهد یک برنامه تبلیغاتی را از طریق رادیو، تلویزیون و مجله به اجرا درآورد. هدف از برنامه تبلیغاتی آگاهی حداکثر مشتریان بالقوه شرکت است. نتایج مطالعات بازاریابی در جدول زیر آورده شده است:

مجله	رادیو	تلویزیون		
		ساعات عادی	ساعات مناسب	
۱۵۰۰۰	۳۰۰۰۰	۴۰۰۰۰	۷۵۰۰۰	هزینه هر بار تبلیغ (تومان)
۲۰۰۰۰۰	۵۰۰۰۰۰	۴۰۰۰۰۰	۹۰۰۰۰۰	تعداد مشتریان بالقوه که از تبلیغ اطلاع پیدا می کنند
۱۰۰۰۰۰	۲۰۰۰۰۰	۳۰۰۰۰۰	۴۰۰۰۰۰	تعداد مشتریان زنی که از تبلیغ اطلاع پیدا می کنند

حداکثر بودجه تبلیغاتی شرکت ۸۰۰۰۰۰۰ تومان است. شرکت خواهان این است که:

- حداقل ۲ میلیون نفر از زنان از تبلیغ آگاهی پیدا کنند.
- حداکثر بودجه تبلیغ در تلویزیون ۵۰۰۰۰۰۰ تومان باشد.
- حداقل سه بار تبلیغ در ساعات عادی روز و دو بار در وقت‌های مناسب از تلویزیون پخش شود.
- دفعات تبلیغ در مجله و رادیو بین ۵ تا ۱۰ بار باشد.

مسئله را به صورت یک مدل برنامه ریزی خطی فرموله کنید.

- تعریف متغیر تصمیم:

$X_1$ : تعداد تبلیغ در ساعات مناسب تلویزیون  
 $X_2$ : تعداد تبلیغ در ساعات عادی تلویزیون  
 $X_3$ : تعداد تبلیغ در رادیو  
 $X_4$ : تعداد تبلیغ در مجله

- تعریف تابع هدف:

$$\text{Max } Z = 900000 X_1 + 400000 X_2 + 500000 X_3 + 200000 X_4$$

- محدودیت‌ها:

S.t.

- $75000 X_1 + 40000 X_2 + 30000 X_3 + 15000 X_4 \leq 800000$  (محدودیت مربوط به کل بودجه)
- $400000 X_1 + 300000 X_2 + 200000 X_3 + 100000 X_4 \geq 2000000$  (محدودیت مربوط به میزان زن بیننده تبلیغات)
- $75000 X_1 + 40000 X_2 \leq 500000$  (محدودیت مربوط به حداکثر بودجه تلویزیون)
- $X_1 \geq 2$  (محدودیت مربوط به عبارت حداقل دو بار در ساعت خوب)
- $X_1 \geq 3$  (محدودیت مربوط به عبارت حداقل ۳ بار در ساعت خوب)
- $0 \leq X_3 + X_4 \leq 10$  (محدودیت مربوط به میزان تبلیغ در رادیو و مجله)

۱۵- بازرسان شرکتی از نظر سطح تخصص در دو سطح درجه ۱ و درجه ۲ قرار دارند. این بازرسان مسئول کنترل کیفیت هستند. در هر شیفت ۱۸۰۰ واحد کالا باید بازرسی شود. بازرسان درجه ۱ می‌توانند در هر ساعت ۲۵ عدد محصول را با ۹۸٪ اطمینان در صحت انجام بازرسی و بازرسان درجه ۲ با اطمینانی معادل ۹۵٪ تعداد ۱۵ عدد محصول را در هر ساعت کنترل کنند.

حقوق بازرسان درجه ۱ در هر ساعت ۲۰۰ تومان و بازرسان درجه ۲، ۱۵۰ تومان است و اشتباه در بازرسی هر محصول از سوی بازرسان برای شرکت ۲۰ تومان زیان به دنبال دارد. شرکت ۸ بازرس درجه ۱ و ۱۰ بازرس درجه ۲ در اختیار دارد. شرکت مایل است با حداقل هزینه بالاترین راندمان ممکن را داشته باشد. مسئله را به صورت یک مدل برنامه ریزی خطی فرموله کنید.

- تعریف متغیر تصمیم:

$X_1$ : تعداد ساعاتی که بازرسان درجه ۱ به بازرسی می‌پردازند  
 $X_2$ : تعداد ساعاتی که بازرسان درجه ۲ به بازرسی می‌پردازند

- تعریف تابع هدف:

$$\text{Min } C = 200 X_1 + 150 X_2 + 20(0.02 \times 25 \times X_1 + 0.05 \times 15 \times X_2)$$



- محدودیت‌ها :

S.t.

$$25X_1 + 15X_2 \geq 1800 \quad (\text{محدودیت مربوط به تعداد واحد بازرسی شده در روز})$$

$$25X_1 + 15X_2 \leq 1800 \quad (\text{محدودیت مربوط به کل ساعات کار بازرسان درجه ۱})$$

$$25X_1 + 15X_2 \leq 1800 \quad (\text{محدودیت مربوط به کل ساعات کار بازرسان درجه ۲})$$

۱۶- کارخانه ای در صدد آموزش مکانیک‌های مورد نیاز خود است. از هر مکانیک آموزش دیده می‌توان به عنوان مربی ۱۰ کار آموز استفاده کرد. مدت دوره کار آموزی یک ماه است. بر مبنای تجارب قبلی پیش بینی می‌شود که از هر ۱۰ کارآموز ۷ نفر دوره را با موفقیت به انجام برسانند. تعداد مکانیک‌های آموزش دیده مورد نیاز کارخانه در هر سه ماه آینده به شرح زیر است :

$$\text{مهر} = 100 \text{ نفر} , \quad \text{آبان} = 150 \text{ نفر} , \quad \text{آذر} = 200 \text{ نفر}$$

در ابتدای مهر ماه ۱۳۰ مکانیک آموزش دیده وجود دارد. حقوق افراد به شرح زیر است :

- حقوق کار آموز = ۴۰۰ تومان
  - حقوق مکانیک آموزش دیده شاغل = ۷۰۰ تومان
  - حقوق مکانیک آموزش دیده بیکار = ۵۰۰ تومان
- مدیریت، اخراج مکانیک آموزش دیده را ممنوع کرده است.

مدل مسئله را به گونه ای فرموله کنید که با حداقل پرداخت دستمزد، مکانیک‌های مورد نیاز شرکت آموزش داده شوند.

- تعریف متغیر تصمیم :

$X_1$ : تعداد ساعاتی که بازرسان درجه ۱ به بازرسی می‌پردازند

$X_2$ : تعداد ساعاتی که بازرسان درجه ۲ به بازرسی می‌پردازند

$I_i$ : تعداد مکانیک آموزش داده شده بیکار در ماه  $i$  ام.

- تعریف تابع هدف:

$$\text{Min } C = 400(X_1 + X_2) + 700\left(100 + \frac{X_1}{10} + 150 + \frac{X_2}{10} + 200\right) + 500(I_1 + I_2)$$

- محدودیت‌ها :

S.t.

$$[\text{مکانیک بیکار}] + [\text{مکانیک شاغل ماه بعد}] + [\text{تفاضل مکانیک}] = [\text{کار آموز مکانیک شده}] + [\text{مکانیک شاغل}] + [\text{مکانیک بیکار ماه قبل}]$$

$$130 = 100 + \frac{X_1}{10} + I_1 \quad (\text{مهر ماه})$$

$$I_1 + \frac{X_1}{10} + 0.7X_1 = 150 + \frac{X_2}{10} + I_2 \quad (\text{آبان ماه})$$

$$I_2 + \frac{X_2}{10} + 0.7X_2 = 150 \quad (\text{آذر ماه})$$

۱۷- مزرعه داری در نظر دارد زمین کشاورزی خود را برای کشت محصولات ذرت ، جو ، سویا ، پنبه و گندم اختصاص دهد . مزرعه او ۳۵۰ جریب است. حداکثر مبلغ پرداختی برای کارگر ۵۰۰۰۰ تومان است . دستمزد پرداختنی به ازای هر ساعت کار به طور متوسط ۲۰ تومان است. جدول زیر میزان ساعاتی را که برای کشت هر جریب از این اقلام به کارگر نیاز دارد و سود حاصله از آن را نشان می‌دهد .

محصول	کار مورد نیاز (ساعت / جریب)	سود در هر جریب
ذرت	۲	۴۰
جو	۲	۱۸
سویا	۹	۴۹.۵
پنبه	۵	۳۰
گندم	۷	۲۹

کشاورز برای تأمین علوفه مورد نیاز دام‌های خود باید ۵۰ جریب را به کشت ذرت ، جو یا مخلوطی از این دو تخصیص دهد . به منظور جلب نظر مشتریان ، او باید طبق سنوات گذشته حداقل ۲۰ جریب از زمین خود را به کشت پنبه و ۲۰ جریب را به کشت گندم اختصاص دهد . با توجه به تجهیزاتی که در اختیار دارد حداکثر مقداری را که می‌تواند زیر کشت سویا ببرد ۱۵۰ جریب است . این مسئله را فرموله کنید.

- تعریف متغیر تصمیم :

$X_i$ : میزان زمینی که محصول  $i$  در آن کاشته می‌شود (بر حسب جریب)

(گندم ۵؛ پنبه ۴؛ سویا ۳؛ جو ۲؛ ذرت ۱) ( $i=1$ )

- تعریف تابع هدف:

$$\text{Max } Z = 40X_1 + 18X_2 + 49.5X_3 + 30X_4 + 29X_5$$

- محدودیت‌ها :

S.t.

$$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 \leq 350 \quad (\text{محدودیت مربوط به کل موجودی زمین})$$

$$2X_1 + 2X_2 + 9X_3 + 5X_4 + 7X_5 \leq \frac{50000}{20} \quad (\text{محدودیت مربوط به حداکثر دستمزد کارگران})$$

$$X_1 + X_2 = 50 \quad (\text{محدودیت مربوط به علوفه مورد نیاز دام‌های خود})$$

$$X_4 \geq 20 \quad (\text{محدودیت مربوط به کاشت پنبه})$$

$$X_5 \geq 20 \quad (\text{محدودیت مربوط به کاشت گندم})$$

$$X_3 \leq 150 \quad (\text{محدودیت مربوط به حداکثر کاشت سویا})$$

۱۸- یک شرکت بافندگی ، دستکش‌های زنانه را در مدل‌ها و رنگ‌های مختلف تولید می‌کند واحد بازار یابی این شرکت هفت مدل را با اطمینان از اینکه تمام دستکش‌های تولید شده به فروش خواهند رسید ، انتخاب کرده است . واحد حسابداری اطلاعات مربوط به هزینه مواد اولیه و هزینه های تولید را ارائه کرده است . جدول زیر هزینه مواد و قیمت فروش دستکش‌ها را نشان می‌دهد .

مدل	بهای عمده فروشی	هزینه مواد
۱	۵	۲,۴
۲	۵,۵	۲,۲۵
۳	۵,۱۰	۲,۸۵
۴	۵	۲,۱۰
۵	۴,۸۵	۱,۵
۶	۵,۰۵	۱,۶۵
۷	۵,۵۵	۱,۹۵

بخش تولید «زمان ماشین بافت» و «زمان ماشین بسته بندی» و «زمان بازرسی» را به عنوان سه منبع بحرانی شناسایی کرده است.

مدت زمان در دسترس در دوره برنامه ریزی برای ماشین بافت ۴۲۰۰۰ ساعت است که هزینه هر ساعت آن یک است و زمان در دسترس ماشین بسته بندی ۵۰۰۰ ساعت و با هزینه ای معادل ۲ در هر ساعت است و ۳۶۰۰ ساعت نیز برای بازرسی در نظر گرفته شده که هر ساعت آن معادل ۳ هزینه دارد زمان و هزینه مورد نیاز هر واحد از هر مدل از دستکش‌ها در هر کدام از سه بخش به شرح زیر است .

مدل	زمان و هزینه هر واحد					
	بخش بافندگی		بخش بسته بندی		بخش بازرسی	
	زمان به ساعت	هزینه	زمان به ساعت	هزینه	زمان به ساعت	هزینه
۱	۰,۸	۰,۰۸۵	۰,۱۷	۰,۰۵	۰,۱۵	۰,۸
۲	۰,۶۵	۰,۰۹۰	۰,۱۸	۰,۰۳	۰,۰۹	۰,۶۵
۳	۰,۹۵	۰,۰۹۰	۰,۱۸	۰,۰۵	۰,۱۵	۰,۹۵
۴	۱,۱۰	۰,۰۹۵	۰,۱۹	۰,۰۵	۰,۱۵	۱,۱
۵	۰,۶۰	۰,۱۰۰	۰,۲۰	۰,۰۴	۰,۱۲	۰,۶
۶	۰,۶۵	۰,۰۸۰	۰,۱۷	۰,۰۶	۰,۱۸	۰,۶۵
۷	۰,۸۰	۰,۰۹۰	۰,۱۸	۰,۰۴	۰,۱۲	۰,۸۰

سوابق نشان داده است که حداکثر<sup>۱</sup> ارزش مواد مصرفی هر مدل طی یک دوره را می‌توان در انبار نگه داری کرد . طبق خط مشی موسسه ، ارزش موجودی مواد انبار شده نباید بیشتر از ۳۵۰۰۰ باشد.

واحد بازرسی اگر چه از نظر توانایی فروش سقفی را قائل نشده است ولی در زمینه فروش حداقلی را در نظر گرفته است ، بدین ترتیب که فروش هر مدل از دستکش‌ها باید حداقل ۱۰۰ جفت باشد . مدل برنامه ریزی خطی این مسئله را بنویسید .

✓ ابتدا جدول بهای تمام شده را برای هر کالا تشکیل می‌دهیم.

مدل	بهای تمام شده				بهای عمده فروشی هر واحد	جمع بهای تمام شده هر واحد	سود هر واحد
	هزینه مواد	هزینه بازرسی	هزینه بسته بندی	هزینه بافندگی			
۱	۲,۴	۰,۸	۰,۰۵	۰,۰۸۵	۵	۳,۳۳۵	۱,۶۶۵
۲	۲,۲۵	۰,۶۵	۰,۰۳	۰,۰۹	۵,۵	۳,۰۲	۲,۴۸
۳	۲,۸۵	۰,۹۵	۰,۰۵	۰,۰۹	۵,۱	۳,۹۴	۱,۱۶
۴	۲,۱	۱,۱	۰,۰۵	۰,۰۹۵	۵	۳,۳۴۵	۱,۶۵۵
۵	۱,۵	۰,۶	۰,۰۴	۰,۱	۴,۸۵	۲,۲۴	۲,۶۱
۶	۱,۶۵	۰,۶۵	۰,۰۶	۰,۰۸	۵,۰۵	۲,۴۴	۲,۶۱
۷	۱,۹۵	۰,۸	۰,۰۴	۰,۰۹	۵,۵۵	۲,۸۸	۲,۶۷

• تعریف متغیر تصمیم:

$X_i$ : تعداد دستکش نوع  $i$  تولید شده ( $i=1,2,3,4,5,6,7$ )

• تعریف تابع هدف:

$$\text{Max } Z = 1,665 X_1 + 2,48 X_2 + 1,16 X_3 + 1,655 X_4 + 2,61 X_5 + 2,61 X_6 + 2,67 X_7$$

• محدودیت‌ها:

S.t.

$$0,15 X_1 + 0,09 X_2 + 0,15 X_3 + 0,15 X_4 + 0,12 X_5 + 0,18 X_6 + 0,12 X_7 \leq 3600 \quad (\text{حداکثر زمان کارکرد واحد بازرسی})$$

$$0,17 X_1 + 0,18 X_2 + 0,18 X_3 + 0,19 X_4 + 0,2 X_5 + 0,17 X_6 + 0,18 X_7 \leq 5000 \quad (\text{حداکثر زمان کارکرد واحد بسته بندی})$$

$$0,8 X_1 + 0,65 X_2 + 0,95 X_3 + 1,1 X_4 + 0,6 X_5 + 0,65 X_6 + 0,8 X_7 \leq 42000 \quad (\text{حداکثر زمان کارکرد واحد بافندگی})$$

$$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7 \geq 100 \quad (\text{حداقل میزان فروش از هر نوع دستکش})$$

$$\frac{1}{3}(2,4 X_1 + 2,25 X_2 + 2,85 X_3 + 2,1 X_4 + 1,5 X_5 + 1,65 X_6 + 1,95 X_7) \leq 35000 \quad (\text{ظرفیت انبار برای مواد اولیه})$$

$$0,8 * 0,15 X_1 + 0,65 * 0,09 X_2 + 0,95 * 0,15 X_3 + 1,1 * 0,15 X_4 + 0,6 * 0,12 X_5 + 0,65 * 0,18 X_6 + 0,8 * 0,12 X_7 \leq 3600 * 1$$

(حداکثر هزینه اختصاص داده شده به واحد بازرسی)

$$0,05 * 0,17 X_1 + 0,03 * 0,18 X_2 + 0,05 * 0,18 X_3 + 0,05 * 0,19 X_4 + 0,04 * 0,2 X_5 + 0,06 * 0,17 X_6 + 0,04 * 0,18 X_7 \leq 5000 * 2$$

(حداکثر هزینه اختصاص داده شده به واحد بسته بندی)

$$0,085 * 0,8 X_1 + 0,09 * 0,65 X_2 + 0,09 * 0,95 X_3 + 0,095 * 1,1 X_4 + 0,1 * 0,6 X_5 + 0,08 * 0,65 X_6 + 0,09 * 0,8 X_7 \leq 42000 * 3$$

(حداکثر هزینه اختصاص داده شده به واحد بافندگی)

۱۹- می‌خواهیم در دو استان الف و ب سه نوع راه اصلی، فرعی و روستایی بسازیم. فرض می‌کنیم که گسترش راه‌ها موجب افزایش درآمد سرانه ساکنان این استان‌ها می‌باشد. در جدول زیر مقدار این افزایش به ازای هر کیلومتر راه و همچنین ایجاد و نیروی انسانی متخصص مورد نیاز برای هر کیلو متر نشان داده شده است.

نوع راه	استان الف			استان ب		
	اصلی	فرعی	روستایی	اصلی	فرعی	روستایی
افزایش درآمد سرانه به ازای هر کیلو متر راه جدید (به ریال)	۸	۱۲	۷	۲۰	۱۰	۳
هزینه ایجاد هر کیلو متر راه (میلیون ریال)	۳۰	۱۳	۵	۳۵	۱۶	۶
نیروی انسانی برای هر کیلومتر (نفر - سال)	۰,۹	۰,۵	۰,۱	۰,۲	۰,۶	۰,۱۵

کل بودجه سالیانه برای راه‌های دو استان ۶۵۰۰ میلیون ریال و تعداد نیروی انسانی متخصص ۲۸۰ (نفر - سال) و جمعیت استان الف ۱ میلیون نفر و جمعیت استان ب ۱,۲ میلیون نفر است. ساختن هر کیلو متر راه روستایی  $\frac{1}{8}$  و هر کیلومتر راه فرعی  $\frac{1}{3}$  راه اصلی به ماشین آلات نیاز دارد. اگر از ماشین آلات موجود فقط برای ساختن راه اصلی استفاده شود، تنها می‌توان ۹۰ کیلو متر راه ساخت (نیاز ماشین آلات در دو استان یکسان است). راه‌های روستایی ساخته شده در یک استان نباید کمتر از ۳۰٪ کل راه‌ها باشد.

کل راه‌های ساخته شده در یک استان نباید کمتر از ۸۰٪ کل راه‌های دیگر باشد. مسئله را به صورت یک مدل برنامه ریزی خطی به منظور حداکثر کردن مجموع درآمد دو استان فرموله کنید.

• تعریف متغیر تصمیم:

$X_{ij}$ : میزان راه نوع  $i$  که در استان  $j$  احداث می‌گردد (بر حسب کیلومتر)

(استان ب ۲؛ استان الف ۱)؛ (راه روستایی ۳؛ راه فرعی ۲؛ راه اصلی ۱)  $(i=1, 2, 3)$

• تعریف تابع هدف:

$$\text{Max } Z = 8X_{11} + 12X_{21} + 7X_{31} + 20X_{12} + 10X_{22} + 3X_{32}$$

S.t.

• محدودیت‌ها:

$$30X_{11} + 13X_{21} + 5X_{31} + 35X_{12} + 16X_{22} + 6X_{32} \leq 6500$$

(محدودیت مربوط به کل بودجه عمرانی)

$$0,9X_{11} + 0,5X_{21} + 0,1X_{31} + 0,2X_{12} + 0,6X_{22} + 0,15X_{32} \leq 280$$

(محدودیت مربوط به نیروی انسانی متخصص)

$$\frac{1}{8}(X_{31} + 13X_{32}) + \frac{1}{3}(X_{21} + 35X_{22}) + (X_{12} + 6X_{11}) \leq 90$$

(محدودیت مربوط به ماشین آلات)

$$X_{31} \geq 0,3(X_{11} + X_{21} + X_{31} + X_{12} + X_{22} + X_{32})$$

(محدودیت مربوط به راه روستایی در استان ۱)

$$X_{32} \geq 0,3(X_{11} + X_{21} + X_{31} + X_{12} + X_{22} + X_{32})$$

(محدودیت مربوط به راه روستایی در استان ۲)

$$X_{11} + X_{21} + X_{31} \geq 0,8(X_{12} + X_{22} + X_{32})$$

(محدودیت مربوط به حداقل راه در استان ۱)

$$X_{12} + X_{22} + X_{32} \geq 0,8(X_{11} + X_{21} + X_{31})$$

(محدودیت مربوط به حداقل راه در استان ۲)

۲۰- محصولات یک کارخانه کاغذ سازی در سه عرض استاندارد ۵ و ۱۰ و ۲۰ فوت تولید می شود. فرض این است که این محصولات در رول هایی با طول زیاد تولید شده و هر جا که لازم باشد می توان آن ها را قطع کرد یا بر عکس به هم وصل کرد. سفارشی در یافت شده که مشتری سه نوع کاغذ با مشخصات زیر نیاز دارد. مدل ریاضی این مسئله ا طوری بنویسید که ضایعات کارخانه حداقل شود.

نوع کاغذ	عرض کاغذ	طول کاغذ
۱	۵	۱۰۰
۲	۷	۳۰۰
۳	۹	۲۰۰

الگو های برش:

۵	۵	۵	۵	(۵)
---	---	---	---	-----

۵	۵	(۲)
---	---	-----

۵	(۱)
---	-----

۵	۵	۷	۳	(۶)
---	---	---	---	-----

۷	۳	(۳)
---	---	-----

۵	۵	۹	۱	(۷)
---	---	---	---	-----

۹	۱	(۴)
---	---	-----

۹	۹	۲	(۸)
---	---	---	-----

۷	۷	۶	(۹)
---	---	---	-----

۷	۹	۴	(۱۰)
---	---	---	------

• تعریف متغیر تصمیم:

$X_i$ : طول کاغذهایی که توسط الگو  $i$  ام برش داده شده اند ( $i=1,2,3,\dots,10$ )

• تعریف تابع هدف:

$$\text{Max } Z = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6 + X_7 + X_8 + X_9 + X_{10}$$

S.t. • محدودیت ها :

$$X_1 + 2X_2 + 4X_5 + 2X_6 + 2X_7 \geq 100 \quad (\text{محدودیت مربوط به نیاز کاغذ با عرض ۵})$$

$$X_3 + X_4 + 2X_9 + X_{10} \geq 300 \quad (\text{محدودیت مربوط به نیاز کاغذ با عرض ۷})$$

$$X_8 + X_7 + 2X_8 + X_{10} \geq 200 \quad (\text{محدودیت مربوط به نیاز کاغذ با عرض ۹})$$

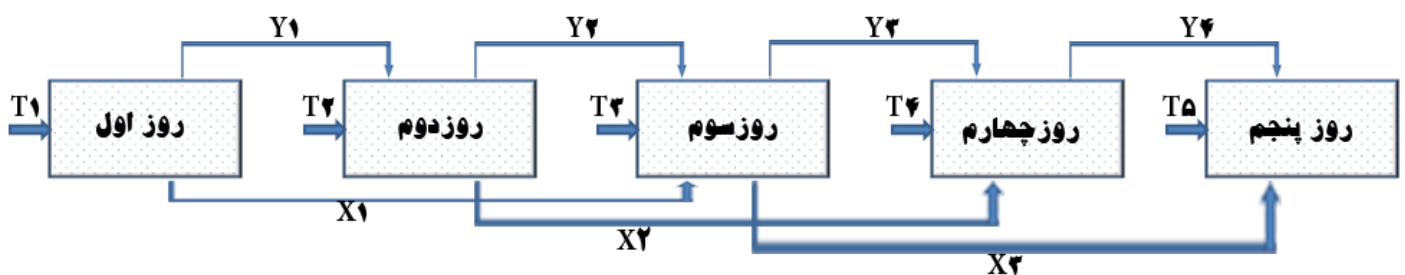
$$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7, X_8, X_9, X_{10} \geq 0$$

۲۱- رستورانی برای کارهای روزانه خود احتیاج به دستمال سفره دارد. میزان نیاز این رستوران برای ۵ روز اول هفته به شرح زیر است:

روز	تقاضا برای روزهای مختلف
۱	۱۱۰
۲	۲۱۰
۳	۱۹۰
۴	۱۲۰
۵	۱۰۰

موجودی سفره در روز صفر (شروع برنامه) صفر است. دستمال‌های مورد نیاز از سه طریق تهیه می‌شوند:

۱. خرید به قیمت هر عدد ۱۰۰ ریال
  ۲. فرستادن دستمال‌های کثیف به خشک شویی با هزینه ای معادل ۳۰ ریال برای هر دستمال که بعد از هر ۴۸ ساعت آماده می‌شود
  ۳. فرستادن دستمال‌ها به خشک شویی سریع با هزینه ای معادل ۵۰ ریال برای هر دستمال که بعد از ۲۴ ساعت آماده می‌شود.
- فرض می‌شود که دستمال‌های مصرفی هر روز در روز بعد قابل استفاده نیست مگر اینکه به خشک شویی فرستاده شود (زمان ارسال دستمال‌های مصرف شده، پایان روز است). مسئله را به گونه ای فرموله کنید که کل هزینه ۵ روز حداقل شود.



- تعریف متغیر تصمیم:

$Y_i$ : مقدار دستمال کاغذی فرستاده شده به خشک‌شویی سریع در روز  $i$  ام ( $i=1,2,3,4,5$ )

$X_i$ : مقدار دستمال کاغذی فرستاده شده به خشک‌شویی عادی در روز  $i$  ام ( $i=1,2,3,4,5$ )

$T_i$ : مقدار دستمال کاغذی فرستاده شده به خریداری شده در روز  $i$  ام ( $i=1,2,3,4,5$ )

- تعریف تابع هدف:

$$\text{Min } C = 100(T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5) + 50(Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4 + Y_5) + 30(X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5)$$

- محدودیت‌ها:

S.t.

دستمال خشک‌شویی شده سریع + دستمال خشک‌شویی شده عادی (فرستاده شده دو روز قبل) + دستمال خریداری شده در همان روز  
= تقاضای دستمال همان روز

$$T_1 + 0 + 0 = 110 \quad (\text{محدودیت مربوط به تأمین دستمال روز اول})$$

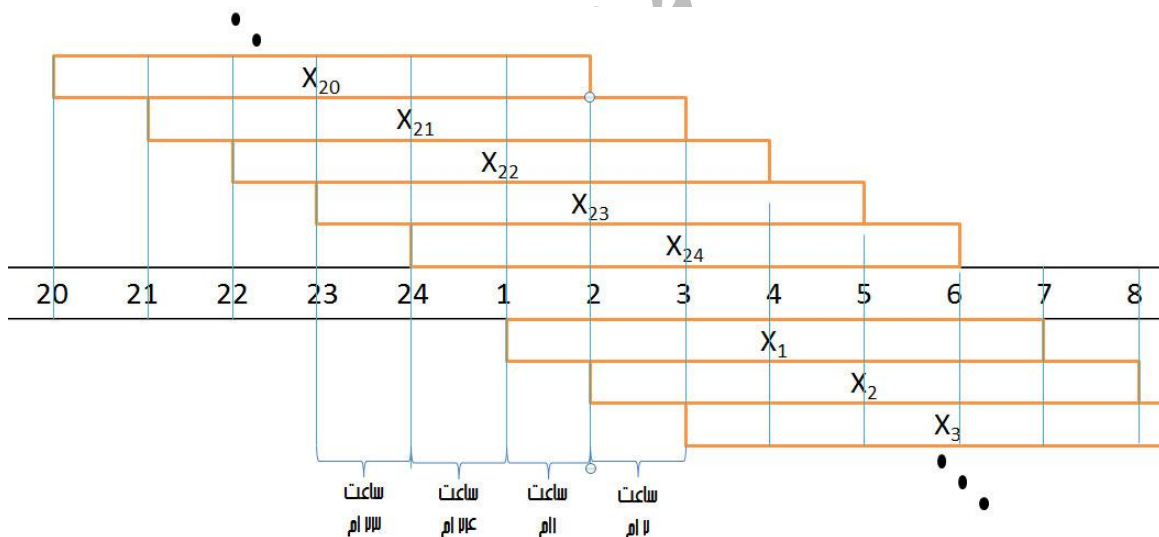
$$T_2 + 0 + Y_1 = 210 \quad (\text{محدودیت مربوط به تأمین دستمال روز دوم})$$

$$T_3 + X_1 + Y_2 = 190 \quad (\text{محدودیت مربوط به تأمین دستمال روز سوم})$$

$$T_4 + X_2 + Y_3 = 120 \quad (\text{محدودیت مربوط به تأمین دستمال روز چهارم})$$

$$T_5 + X_3 + Y_4 = 100 \quad (\text{محدودیت مربوط به تأمین دستمال روز پنجم})$$

۲۲- فرض کنید تعداد حداقل اتوبوس مورد نیاز در ساعت  $i$ ام روز برابر  $b_i$  باشد ( $i=1,2,3,\dots,24$  و  $i=0$ ). هر اتوبوس ۶ ساعت متوالی کار می‌کند. اگر تعداد اتوبوس‌ها در ساعت  $i$  حداقل مورد نیاز،  $b_i$ ، بیش‌تر شود، اضافه هزینه ای برای  $C_i$  برای هر ساعت کار هر اتوبوس اضافی در نظر گرفته می‌شود. مسئله را به صورت یک مدل برنامه ریزی خطی فرمول بندی کنید تا بتوانید هزینه اضافی کل را حداقل سازید.



• تعریف متغیر تصمیم:

$X_i$ : تعداد اتوبوس‌هایی که کار خود را از ساعت  $i$  آغاز و  $i+6$  به اتمام می‌رسانند. ( $i=1,2,\dots,24$ )

• تعریف تابع هدف:

$$\text{Min } Z = C_1(X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6 - b_1) + C_2(X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6 + X_7 - b_2) + C_3(X_3 + X_4 + X_5 + X_6 + X_7 + X_8 - b_3) + \dots + C_{24}(X_{19} + X_{20} + X_{21} + X_{22} + X_{23} + X_{24} - b_{24})$$

• محدودیت‌ها:



S.t.

$$X_{۲۰} + X_{۲۱} + X_{۲۲} + X_{۲۳} + X_{۲۴} + X_1 \geq b_1 \quad (\text{محدودیت محدود به حداقل اتوبوس مورد نیاز در ساعت ۱ ام})$$

$$X_{۲۱} + X_{۲۲} + X_{۲۳} + X_{۲۴} + X_1 + X_2 \geq b_2 \quad (\text{محدودیت محدود به حداقل اتوبوس مورد نیاز در ساعت ۲ ام})$$

و ...

$$X_{۱۹} + X_{۲۰} + X_{۲۱} + X_{۲۲} + X_{۲۳} + X_{۲۴} \geq b_{۲۴} \quad (\text{محدودیت محدود به حداقل اتوبوس مورد نیاز در ساعت ۲۴ ام})$$

۲۳- مسئله تخصیص سه نوع (اندازه) هواپیمای مختلف را برای ۴ مسیر در نظر بگیرید. جدول (۱) حداکثر ظرفیت هواپیماها (بر حسب تعداد مسافر) و تعداد هواپیمای موجود از هر نوع، تعداد پروازهای روزانه که هر هواپیما می‌تواند در یک مسیر معین انجام دهد و تعداد روزانه مسافرانی را که انتظار می‌رود در هر مسیر داشته باشد، نشان می‌دهد.

نوع هواپیما	ظرفیت (مسافر)	تعداد هواپیما	تعداد پروازهای روزانه در هر مسیر			
			۱	۲	۳	۴
۱	۵۰	۵	۳	۲	۲	۱
۲	۳۰	۸	۴	۳	۳	۲
۳	۲۰	۱۰	۵	۵	۴	۲
تعداد روزانه مسافران			۱۰۰	۲۰۰	۹۰	۱۲۰

هزینه عمل کرد مربوط به هر پرواز در مسیرهای مختلف همراه با زیان (سود از دست رفته) مربوط به نپذیرفتن یک مسافر، به علت نداشتن جا در جدول (۲) خلاصه شده است.

مسئله را به صورت یک مدل برنامه ریزی خطی فرموله کنید تا بتوانید نحوه تخصیص هواپیماها به مسیرها را، به طوری که هزینه کل را حداقل سازد، بدست آورید.

نوع هواپیما	هزینه عملکرد برای هر پرواز در مسیر مفروض (بر حسب تومان)			
	۱	۲	۳	۴
۱	۱۰۰۰	۱۱۰۰	۱۲۰۰	۱۵۰۰
۲	۸۰۰	۹۰۰	۱۰۰۰	۱۰۰۰
۳	۶۰۰	۶۰۰	۸۰۰	۹۰۰
زیان نپذیرفتن یک مسافر	۴۰	۵۰	۴۵	۷۰

• تعریف متغیر تصمیم:

$X_{ij}$ : تعداد پروازهایی که هواپیمای نوع  $i$  که به مسیر  $j$  پرواز می‌کند.  $(i=1,2,3)(j=1,2,3,4)$

$Y_i$ : تعداد مسافری که در مسیر  $i$  نمی‌توانیم بپذیریم

• تعریف تابع هدف:

$$\text{Min } Z = 1000 X_{11} + 1100 X_{12} + 1200 X_{13} + 1500 X_{14} + 800 X_{21} + 900 X_{22} + 1000 X_{23} + 1000 X_{24} + 600 X_{31} + 600 X_{32} + 800 X_{33} + 900 X_{34} + 40 Y_1 + 50 Y_2 + 45 Y_3 + 70 Y_4$$

• محدودیت‌ها :

S.t.

$$X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14} \leq 5 \quad (\text{محدودیت مربوط به تعداد هواپیماهای موجود نوع ۱})$$

$$X_{21} + X_{22} + X_{23} + X_{24} \leq 8 \quad (\text{محدودیت مربوط به تعداد هواپیماهای موجود نوع ۲})$$

$$X_{31} + X_{32} + X_{33} + X_{34} \leq 10 \quad (\text{محدودیت مربوط به تعداد هواپیماهای موجود نوع ۳})$$

$$+ [\text{تعداد مسافر جابجا شده با هواپیما نوع ۳}] + [\text{تعداد مسافر جابجا شده با هواپیما نوع ۲}] + [\text{تعداد مسافر جابجا شده با هواپیما نوع ۱}] \\ = [\text{تعداد مسافر موجود}] = [\text{تعداد مسافر پذیرفته نشده در مسیر}]$$

$$50X_{11} + 30X_{21} + 20X_{31} + Y_1 = 100 \quad (\text{محدودیت مربوط به تعداد مسافر موجود در مسیر ۱})$$

$$50X_{12} + 30X_{22} + 20X_{32} + Y_2 = 200 \quad (\text{محدودیت مربوط به تعداد مسافر موجود در مسیر ۲})$$

$$50X_{13} + 30X_{23} + 20X_{33} + Y_3 = 90 \quad (\text{محدودیت مربوط به تعداد مسافر موجود در مسیر ۳})$$

$$50X_{14} + 30X_{24} + 20X_{34} + Y_4 = 120 \quad (\text{محدودیت مربوط به تعداد مسافر موجود در مسیر ۴})$$

$$X_{11} \leq 3 \quad ; X_{12} \leq 2 \quad ; X_{13} \leq 2 \quad ; X_{14} \leq 1 \quad X_{21} \leq 3 \quad ; X_{22} \leq 2 \quad ; X_{23} \leq 2 \quad ; \\ X_{24} \leq 1 \quad ; X_{31} \leq 5 \quad ; X_{32} \leq 5 \quad ; X_{33} \leq 4 \quad X_{34} \leq 2$$

(محدودیت‌های مربوط به حداکثر تعداد پرواز هر هواپیما در هر مسیر)

در صورت وجود هر گونه اشتباه علمی یا تایپی لطفاً آن را به نویسندگان این حل‌المسائل اطلاع دهید تا در نسخه های بعدی اصلاح شوند.

با تشکر

رضا محمدیان (09366396359) (Reza.Mohammadianboy@Gmail.com)

امیر مزیکی (09190866004) (Amir.Mazyaki1@yahoo.com)