

## تحقیق در عملیات

۱- جدول حمل و نقل زیر را در نظر بگیرید:

	$d_1=5$	$d=15$	$d_r=15$	$d_f=15$
$s_1=15$	۱۰	۲	۲۰	۱۱
$s_r=25$	۱۲	۷	۹	۲۰
$s_f=10$	۴	۱۴	۱۶	۱۸

اگر مقدار تابع هدف جدول حاصل از گوشه شمالغربی را  $\bar{Z}$  و جدول حاصل از کمترین هزینه ماتریس را  $\hat{Z}$  بنامیم،  $\bar{Z} - \hat{Z}$  چقدر است؟

- (۴) ۵۸      (۳) ۸۵      (۲) ۵۴      (۱) ۴۵

۲- در جدول سوال قبل اولین خانه‌ای که با روش وگل پر خواهد شد، کدام است؟

- (۴)  $x_{r1}$       (۳)  $x_{r2}$       (۲)  $x_{r3}$       (۱)  $x_{r4}$

۳- در ۲ سوال قبل اگر جدول را با گوشه شمالغربی پر کنیم، متغیر وارد شونده کدام است؟

- (۴)  $x_{13}$       (۳)  $x_{r1}$       (۲)  $x_{r3}$       (۱)  $x_{r4}$

۴- در سوال قبل با ورود متغیر به پایه میزان تغییر تابع هدف چقدر خواهد بود؟

- (۴) -۵۰      (۳) -۴۵      (۲) ۵۰      (۱) ۴۵

۵- مسأله حمل و نقل زیر را در نظر بگیرید:

$$\text{Min } \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij}$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \leq a_i \quad i = 1, \dots, m$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j \quad j = 1, \dots, n$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad \forall i, j$$

کدام گزینه صحیح می‌باشد؟

- (۱)  $\sum_i a_i \leq \sum_j b_j$       (۲)  $\sum_i a_i = \sum_j b_j$   
 (۳)  $\sum_i a_i \geq \sum_j b_j$       (۴)  $\sum_i a_i - \sum_j b_j = 1$

۶- جدول حمل و نقل زیر را در نظر بگیرید:

	۱۰	۲۰	۲۰
۱۰	(۱۰)		
۴۰		(۲۰)	(۲۰)

جدول صفحه قبل تباهیده است. فرض کنید مضارب مربوط به جدول برابر  $u_1 = 1, u_2 = -1, v_1 = 2, v_2 = 2, v_3 = 5$  که هزینه‌های متغیرهای صفر توسط رابطه زیر بدست می‌آید:

$$c_{ij} = i + j\theta \quad -\infty < \theta < +\infty$$

مقدار تابع هدف چقدر است؟

- ۱۳۰ (۱)      ۱۱۰ (۲)      ۱۴۰ (۳)      ۱۶۰ (۴)

۷- در سوال قبل، اگر خانه  $x_{12}$  هم پایه ای باشد،  $\theta$  چقدر است؟

- $\theta = 1$  (۱)       $\theta = 2$  (۲)       $\theta = 3$  (۳)       $\theta = 4$  (۴)

جدول سیمپلکس دوگان زیر را در نظر بگیرید:

	Z	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	RHS
$x_1$	۰	۱	۰	a	c	-۳
$x_2$	۰	۰	۱	b	d	۴
Z	۱	۰	۰	-۲	-۳	

این جدول مربوط به یک مسأله حداقل سازی می‌باشد. به ۲ سوال بعد پاسخ دهید.

۸- اگر  $x_4$  متغیر واردشونده باشد و میزان تغییر تابع هدف برابر ۹ باشد، آنگاه c کدام است؟

- ۴ (۱)      +۱ (۲)      ۴ (۳)      -۱ (۴)

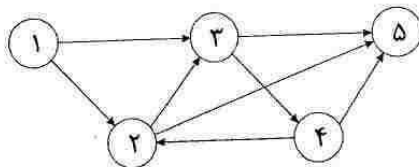
۹- اگر  $a, c \geq 0$  باشد، در این صورت کدام گزینه صحیح نمی‌باشد؟

- (۱) مسأله اولیه ناموجه می‌باشد.  
(۲) مسأله ثانویه جواب نامتناهی دارد.  
(۳) مسأله ثانویه ناموجه است.  
(۴) دوگان موجه می‌باشد.

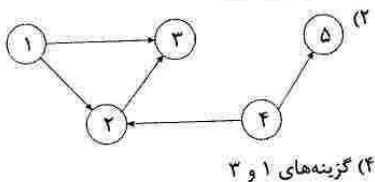
۱۰- با کدام یک از روش‌های زیر می‌توان مسأله تخصیص را حل کرد؟

- (۱) برنامه ریزی خطی      (۲) مدل حمل و نقل      (۳) روش انشعاب و تحدید      (۴) تمام موارد

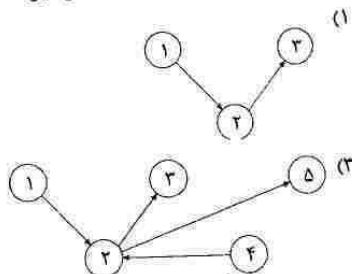
۱۱- گراف زیر را در نظر بگیرید:



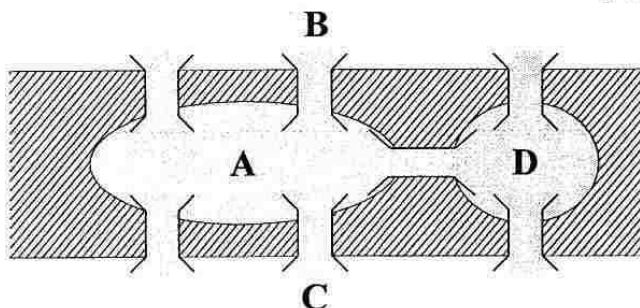
کدام یک از اشکال زیر یک درخت فراگیر (spanning tree) برای شکل فوق می‌باشد؟



گزینه‌های ۱ و ۳



۱۲- رودخانه‌ای که کینگزبرگ را به ۴ قسمت A, B, C, D تقسیم می‌کند را در نظر بگیرید، این قسمت‌های شهر با ۷ پل به یکدیگر وصل می‌شوند:



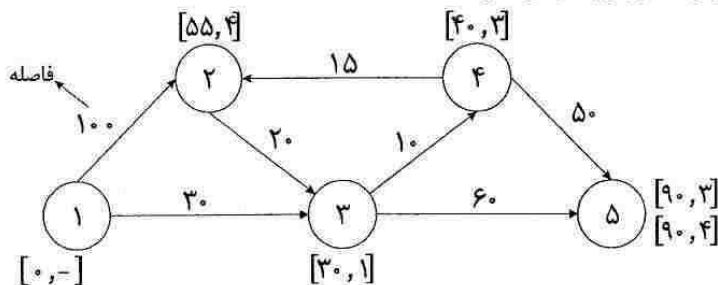
گراف مربوط به این شهر برای مردم ساکن این شهر که بتوانند به قسمت‌های مختلف شهر دسترسی داشته باشند، چند کمان و چند گره دارد؟

- (۱) ۴ گره و ۴ کمان      (۲) ۳ گره و ۷ کمان      (۳) ۷ گره و ۴ کمان      (۴) ۴ گره و ۷ کمان

۱۳- در سوال قبل مجموع درجه گره‌ها چند می‌باشد؟

- (۱) ۱۱      (۲) ۱۲      (۳) ۱۴      (۴) ۴

۱۴- مسأله کوتاه‌ترین مسیر زیر را در نظر بگیرید:



اعدادی که روی هر کدام از کمان‌ها نوشته شده است، نمایانگر مطلب زیر می‌باشد:

$[a, b]$  = [شماره گره قبلی، کوتاه‌ترین فاصله گره ۱ تا گره مورد نظر]

کوتاه‌ترین فاصله گره ۱ تا ۲ کدام است؟

- (۱)  $1 \rightarrow 2$       (۲)  $1 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 2$       (۳)  $1 \rightarrow 3 \rightarrow 5$       (۴)  $1 \rightarrow 3 \rightarrow 4$

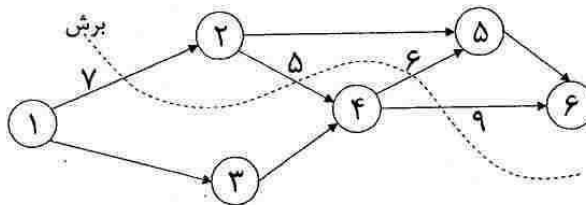
۱۵- در سوال قبل برای حل با الگوریتم دایجسترا تعداد مراحل الگوریتم چقدر است؟

- (۱) ۴      (۲) ۵      (۳) ۷      (۴) ۶

۱۶- در ۲ سوال قبل محدودیت مربوط به گره ۵ در مدل خطی آن کدام است؟

- (۱)  $x_{45} + x_{35} = 1$       (۲)  $-x_{45} - x_{35} = 1$       (۳)  $x_{45} - x_{35} = -1$       (۴)  $-x_{45} + x_{35} = -1$

۱۷- در شکل زیر کدام صحیح است؟



- (۲) حداکثر جریان از ۲۲ بیشتر نمی‌باشد.  
(۴) حداکثر جریان از ۲۷ بیشتر نمی‌باشد.

- (۱) حداکثر جریان ۲۲ می‌باشد.  
(۳) حداقل جریان ۲۷ می‌باشد.

۱۸- در یک بازی دو نفره - دو انگشتی، هر بازیکن یک یا دو انگشت را نشان می‌دهد و به طور هم‌زمان تعداد انگشتان نشان داده توسط حریف را حدس می‌زند. بازیکنی که حدس صحیح را ارائه کند مبلغی معادل مجموع تعداد انگشتان نمایش داده شده دریافت می‌نماید؛ در غیر این صورت بازی بدون امتیاز می‌باشد. مسأله را به صورت یک بازی دو نفره مجموع صفر فرموله کرده‌ایم. امید برد بازیکن A چقدر است اگر B یک انگشت را نشان دهد و دو انگشت طرف مقابلش یعنی A را حدس بزند، کدام است؟

- (۱)  $2x_1 - 2x_2$   
(۲)  $-2x_1 + 2x_2$   
(۳)  $2x_1 - 2x_2$   
(۴)  $-2x_1 + 2x_2$

۱۹- در سوال قبل تعداد استراتژی‌های هر کدام از بازیکنان چقدر است؟

- (۱) ۲  
(۲) ۴  
(۳) ۸  
(۴) ۳

۲۰- در یک مسأله Game Theory برنامه ریزی خطی مربوط به بازیکن A را در نظر بگیرید:

Min M

$$3x_1 - 2x_2 - 5x_3 \geq M$$

$$-x_1 + 4x_2 - 6x_3 \geq M$$

$$-3x_1 - x_2 + 2x_3 \geq M$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

امید برد بازیکن A نسبت به بازی اول B کدام است؟

- (۱)  $3x_1 - 2x_2 - 5x_3$   
(۲)  $3x_1 - x_2 - 3x_3$   
(۳)  $-x_1 + 4x_2 - 6x_3$   
(۴) قابل تشخیص نیست.

پاسخ

۱- گزینه «۱» صحیح است.

در صورتی که جدول را با گوشه شمال‌غربی پر کنیم، داریم:

	۱۰	۲		
۵	→ ۱۰			
		۷	۹	۲۰
	۵	→ ۱۵	→ ۵	
				۱۸
				↓ ۱۰

$$\bar{Z} = 10 \times 5 + 2 \times 10 + 7 \times 5 + 9 \times 15 + 20 \times 5 + 18 \times 10 = 520$$

و در صورتی که جدول را با کم‌ترین هزینه پر کنیم، داریم:

		۲		۱۱
		۱۵		۰
			۹	۲۰
		۱۵		۱۰
۴				۱۸
۵				۵

$$\hat{Z} = 2 \times 15 + 4 \times 5 + 9 \times 15 + 11 \times 0 + 20 \times 10 + 18 \times 5 = 475$$

پس خواهیم داشت:

$$\bar{Z} - \hat{Z} = 45$$

۲- گزینه «۴» صحیح است.

جریمه

	۱۰	۲	۲۰	۱۱	۱۰-۲=۸
	۱۲	۷	۹	۲۰	۹-۷=۲
کمترین هزینه	۴	۱۴	۱۶	۱۸	۱۴-۴=۱۰= بیشترین جریمه
	۱۰-۴=۶	۷-۲=۵	۱۶-۹=۷	۱۸-۲۰=-۲	

۳- گزینه «۱» صحیح است.

	۱۰	۲	۲۰	۱۱
۵		۱۰		
	۱۲	۷	۹	۲۰
		۵	۱۵	۵
	۴	۱۴	۱۶	۱۸
				۱۰

با استفاده از روش چرخشی  $Z_{ij} - C_{ij}$  ها را بدست می آوریم:

$$Z_{13} - C_{13} = -20 + 9 - 7 + 2 = -16$$

$$Z_{14} - C_{14} = -11 + 20 - 7 + 2 = 4$$

$$Z_{21} - C_{21} = -12 + 7 - 2 + 10 = 3$$

$$Z_{31} - C_{31} = -4 + 18 - 20 + 7 - 2 + 10 = 9 \Rightarrow \text{متغیر وارد شونده}$$

$$Z_{32} - C_{32} = -14 + 18 - 20 + 7 = -9$$

$$Z_{33} - C_{33} = -16 + 18 - 20 + 9 = -9$$

۴- گزینه «۳» صحیح است.

$$\Delta Z = -(9)(5) = -45$$

۵- گزینه «۳» صحیح است.

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \leq a_i \Rightarrow \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij} \leq \sum_{i=1}^m a_i$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j \Rightarrow \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m x_{ij} = \sum_{j=1}^n b_j$$

از دو رابطه فوق نتیجه می گیریم که:

$$\sum_{j=1}^n b_j \leq \sum_{i=1}^m a_i$$

۶- گزینه «۱» صحیح است.

$$\text{بهینه} = Z = \sum_i s_i u_i + \sum_j d_j v_j = 10 \times 1 + 40 \times (-1) + 10 \times 2 + 20 \times 2 + 20 \times 5 = 130$$

۷- گزینه «۱» صحیح است.

چون متغیر  $X_{12}$  هم متغیر پایه ای چهارم جدول در نظر گرفته شده است بنابراین  $Z_{12} - C_{12} = 0$  است.

$$Z_{12} - C_{12} = u_1 + v_2 - C_{12} = 0$$

$$\Rightarrow 1 + 2 - (1 + 2\theta) = 0$$

$$\Rightarrow 1 + 2 - 1 - 2\theta = 0 \Rightarrow \theta = 1$$

۸- گزینه «۴» صحیح است.

با توجه به آنکه در این جدول متغیر  $X_1$  خارج شونده از پایه می باشد با ورود  $X_4$  به پایه تست Min نسبت برابر  $\frac{3}{c}$  می باشد (DS مسأله حل می شود).

$$\Delta Z = -(-3) \left( \frac{-3}{c} \right) = 9 \Rightarrow c = -1$$

۹- گزینه «۳» صحیح است.

چون  $a, c \geq 0$  می باشند، پس سطر اول جدول تمام عناصرش بزرگتر مساوی صفر بوده و سمت راست آن منفی است؛ پس اولیه ناموجه می باشد:

$$\boxed{\geq 0} = \boxed{< 0}$$

و چون DS حل می شود، دوگان همواره موجه است. (زیرا جدول اولیه بهینه است) پس دوگان جواب نامتناهی دارد.

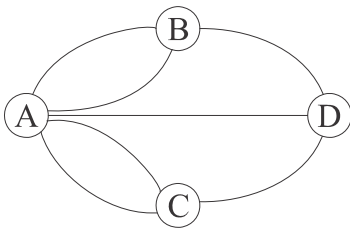
۱۰- گزینه «۴» صحیح است.

مسأله تخصیص یک مسأله LP و یا می تواند ILP باشد. همچنین این مسأله یک حالت خاص مدل حمل و نقل نیز می باشد.

۱۱- گزینه «۳» صحیح است.

درخت فراگیر درختی می باشد که تمام گره ها را هم در بر می گیرد.

۱۲- گزینه «۴» صحیح است.



توجه شود که هر منطقه نشان دهنده یک گره و هر پل نشان دهنده یک کمان می باشد که هر کدام از مناطق را به یکدیگر وصل می کند.

۱۳- گزینه «۳» صحیح است.

درجه هر کدام از گره های B, C و D، ۳ می باشد و درجه گره A، ۵ می باشد بنابراین مجموع درجه گره ها ۱۴ است.

۱۴- گزینه «۲» صحیح است.

اعدادی که روی گره ۲ نوشته شده  $[55, 4]$  می باشد یعنی کوتاه ترین فاصله از گره ۱ به ۲، ۵۵ می باشد و برای رسیدن به گره ۲ از ۴ آمده ایم و برای رسیدن به ۴ از ۳ و سپس ۱ آمده ایم.

۱۵- گزینه «۱» صحیح است.

چون تعداد گره ها ۵ می باشد، پس تعداد تکرارهای الگوریتم  $5-1=4$  می باشد.

۱۶- گزینه «۱» صحیح است.

محدودیت مربوط به گره ۵ که گره پایانی می باشد  $-X_{35} - X_{45} = -1$  یا  $X_{35} + X_{45} = +1$  است.

۱۷- گزینه «۲» صحیح است.

ظرفیت برش مورد نظر ۲۲ می باشد:

$$X = \{1, 3, 4\}$$

$$\bar{X} = \{2, 5, 6\}$$

$$U_{\text{برش}} = \sum_{\substack{i \in X \\ j \in \bar{X}}} u_{ij} = u_{12} + u_{45} + u_{46} = 7 + 6 + 9 = 22$$

پس حداکثر جریان از ۲۲ بیشتر نخواهد شد.

۱۸- گزینه «۱» صحیح است.

		B			
		$[1, 1]$	$[2, 1]$	$[1, 2]$	$[2, 2]$
A	$[1, 1]$	۰	-۳	+۲	۰
	$[2, 1]$	۳	۰	۰	-۴
	$[1, 2]$	-۲	۰	۰	+۳
	$[2, 2]$	۰	+۴	-۳	۰

انگشتی که حدس می زند. ←

انگشتی که نشان می دهد. ←

امید برد بازیکن A →  $2X_1 - 3X_4$

۱۹- گزینه «۲» صحیح است.

با توجه به حل سوال قبل گزینه ۲ صحیح است.

۲۰- گزینه «۱» صحیح است.

با توجه به مدل خطی مسأله امید برد بازیکن A به صورت:

$$E_1^A = 3X_1 - 2X_2 - 5X_3$$