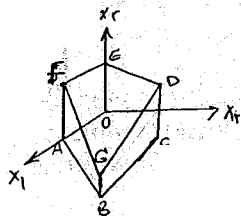


۱- شکل زیر مجموعه جواب‌های شدنی یک مسئله برنامه‌ریزی خطی را نشان می‌دهد. جواب بهینه مسئله برنامه‌ریزی تولید سه محصول، نقطه F می‌باشد. اگر بخواهیم از محصول دوم هم تولید نماییم در این صورت: ( $x_1$  میزان تولید محصول ۱ ام می‌باشد)



- (۱) مقدار تولید محصول اول کاهش و تولید محصول سوم افزایش می‌یابد.
- (۲) مقدار تولید محصول اول افزایش و تولید محصول سوم کاهش می‌یابد.
- (۳) مقدار تولید محصول اول افزایش و تولید محصول سوم تغییری نمی‌کند.
- (۴) تأثیری بر میزان تولید محصولات اول و سوم نخواهد بود داشت.

۲- مسئله برنامه‌ریزی خطی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \text{Min } Z &= Cx \\ Ax &= b \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

برای یک جواب پایه‌ای شدنی با پایه B کدام گزینه صحیح است؟ (R مجموعه اندیس متغیرهای غیرپایه‌ای به ازای این پایه می‌باشد.)

$$\begin{aligned} \text{Min } C_B B^{-1}b + \sum_{j \in R} (Z_j - C_j)x_j & \quad \text{Min } \left( C_B B^{-1}b - \sum_{j \in R} (Z_j - C_j)x_j \right) \\ \sum_{j \in R} B^{-1}a_j x_j \leq x_j \geq B^{-1}b & \quad \sum_{j \in R} B^{-1}a_j x_j \geq B^{-1}b \quad (۱) \\ x_j \geq 0 \quad j \in R & \quad x_j \geq 0 \quad j \in R \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Min } C_B B^{-1}b + \sum_{j \in R} (Z_j - C_j)x_j & \quad \text{Min } Z = C_B B^{-1}b - \sum_{j \in R} (Z_j - C_j)x_j \\ \sum_{j \in R} B^{-1}a_j x_j \geq B^{-1}b & \quad \sum_{j \in R} B^{-1}a_j x_j \leq B^{-1}b \quad (۳) \\ x_j \geq 0 \quad j \in R & \quad x_j \geq 0 \quad j \in R \end{aligned}$$

۳- یک مسئله برنامه‌ریزی خطی ماکزیم‌سازی با نقاط رأسی  $x_1, x_2, x_3, x_4$  در جهت‌های رأسی  $d_1, d_2, d_3$  و با بردار گرادیان C مفروض است بگونه‌ای که  $Cx_1 = 5, Cx_2 = 7, Cx_3 = 3, Cx_4 = 7, Cx_5 = 7, Cx_6 = 0, Cx_7 = -3, Cx_8 = 0$  در نظر بگیرید:

- (۱) مسئله دارای جواب بی‌کران می‌باشد.
- (۲) مسئله دارای جواب بهینه چندگانه می‌باشد.
- (۳) مسئله دارای جواب منحصر به فرد می‌باشد.
- (۴) مسئله دارای یک شعاع بهینه می‌باشد.

۴- قیمت سایه‌ای یک منبع که به حد خود رسیده است چقدر می‌باشد؟

- (۱) صفر می‌باشد.
- (۲) عددی مثبت می‌باشد.
- (۳) عددی منفی می‌باشد.
- (۴) ممکن است صفر باشد.

۵- بخشی از یک جدول بهینه یک مسئله به صورت زیر می‌باشد:

	$x_1$	$x_2$	$S_1$	$S_2$	
$S_1$		۰	-۲		۵
$x_2$		۱	۱		۶
		۰	۳		

$S_1$  و  $S_2$  متغیرهای کمکی محدودیت‌های به فرم  $\leq$  هستند، مقدار بهینه مسئله ثانویه چقدر است؟

- (۱) ۱۱
- (۲) ۱۵
- (۳) ۱۷
- (۴) ۱۸

۶- در سؤال ۳۵، فرض کنید می‌خواهیم محصول جدیدی مانند  $x_7$  را تولید نماییم به طوری که برای تولید یک واحد از آن به ترتیب ۴ و ۵ واحد از منابع اول و دوم مورد استفاده قرار می‌گیرد. به ازای کدام مقادیر  $C_7$ ، تولید این محصول سودآور خواهد بود؟

- (۱)  $C_7 > ۹$
- (۲)  $C_7 > ۱۲$
- (۳)  $C_7 > ۱۳$
- (۴)  $C_7 > ۴$

۷- مسئله زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \text{Min } Cx \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{aligned}$$

- که در آن  $A^t = A$  و  $b^t = C$  می باشد. کدام گزینه صحیح می باشد؟
- (۱) اگر مسئله شدنی باشد، هر دو مسئله دارای جواب بهینه متناهی می باشند.
  - (۲) اگر دوگان مسئله شدنی باشد، حتماً جواب نامحدود دارد.
  - (۳) اگر دوگان مسئله شدنی باشد، ممکن است جواب نامحدود داشته باشد.
  - (۴) دوگان این مسئله حتماً شدنی می باشد.

۸- دو مسئله اولیه و ثانویه را در نظر بگیرید. اگر مسئله دوگان دارای جواب بهینه غیرتباهیده باشد، مسئله اولیه دارای جواب بهینه ..... می باشد.

(۱) چندگانه (۲) نامتناهی (۳) منحصر به فرد (۴) تبهگن

جدول زیر را در نظر بگیرید:  $S_1$  متغیر کمبود محدودیت اول،  $S_2$  متغیر مازاد محدودیت دوم و  $R_2$  متغیر مصنوعی محدودیت اول می باشد. به دو سؤال متوالی و مستقل زیر پاسخ دهید:

پایه	$X_1$	$X_2$	$S_1$	$S_2$	$R_2$	RHS
Z	0	-1	0	e	$M+3$	d
$S_1$	0	$\frac{1}{2}$	1	f	$\frac{1}{2}$	8
$X_1$	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	2

۹- مقدار f چقدر است؟

- (۱)  $\frac{1}{2}$  (۲) -1 (۳)  $-\frac{1}{2}$  (۴) 1

۱۰- مقدار d کدام است؟

- (۱) 12 (۲) 24 (۳) 6 (۴) 9

۱۱- مسئله زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \text{Max } Z = Cx \\ Ax \leq 0 \\ x \geq 0 \end{aligned}$$

- (۱) دوگان مسئله حتماً شدنی است.
- (۲) دوگان مسئله می تواند ناموجه باشد.
- (۳) در صورتی که دوگان موجه باشد می تواند جواب بیکران داشته باشد.
- (۴) گزینه های ۲ و ۳

۱۲- در مسئله زیر ارزش سایه ای منابع به ترتیب برابرند با:

$$\begin{aligned} \text{Max } Z = 2x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 \leq 4 \\ 2x_1 + x_2 \leq 8 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

- (۱) (0,1) (۲) (1,0) (۳) (0,2) (۴) (2,2)

۱۳- مسئله برنامه ریزی خطی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \text{Max } Z = 4x_1 + Cx_2 + x_3 \\ x_1 - x_2 + x_3 \leq 6 \\ x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

در جدول بهینه متغیرهای پایه ای به صورت  $(x_1, x_2)$  می باشد در صورتی که  $t_3^*$  متغیر مازاد سومین محدودیت مسئله ثانویه با مقدار ۷ باشد ( $t_3^* = 7$ ) مقدار صحیح برای C کدام است؟

- (۱) صفر (۲) 1 (۳) 2 (۴) 3

۱۴- جدول بهینه یک مسئله برنامه‌ریزی خطی به صورت زیر می‌باشد:

	$X_1$	$X_2$	$S_1$	$S_2$	$S_3$	$S_4$	
$S_1$	۰	۰	۱	۲	۰	۰	۱
$S_2$	۰	۰	۰	۱	۱	-۱	۲
$X_1$	۱	۰	۰	$\frac{1}{2}$	۰	$\frac{1}{2}$	۱
$X_2$	۰	۱	۰	-۱	۰	۱	۳
Z	۰	۰	۰	$\frac{3}{2}$	۰	$\frac{3}{4}$	

اگر افزایش منبع چهارم، ۳ واحد پولی هزینه ایجاد کند و در اثر این افزایش ترکیب بهینه تغییر نکند، کدام یک از موارد زیر درست است؟

- (۱) هزینه اضافی قابل توجیه است.  
 (۲) سود تغییر نمی‌کند.  
 (۳) سود کاهش نمی‌یابد.  
 (۴) هزینه اضافی قابل توجیه نیست.

۱۵- مسئله برنامه‌ریزی خطی و جدول بهینه آن به صورت زیر است:

$$\text{Min } Z = -4X_1 - 6X_2 - 18X_3$$

s.t

$$2X_1 + 2X_2 \geq 3$$

$$3X_2 + 2X_3 \geq 5$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	
$X_1$	۱	۰	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	۰	$\frac{3}{2}$
$X_2$	۰	۱	$\frac{2}{3}$	۰	$-\frac{1}{3}$	$\frac{5}{3}$
	۰	۰	-۸	-۲	-۲	-۱۶

اگر قرار بود بین افزایش یا کاهش سمت راست اولین محدودیت یا دومین محدودیت یکی را انتخاب کنید تا بیشترین بهبود را در تابع هدف داشته باشید، کدام محدودیت را انتخاب می‌کردید و مقدار این تغییر چقدر بود؟

(۱) کاهش در محدودیت اول به اندازه، ۳ واحد با بهتر شدن تابع هدف به اندازه ۶ واحد  
 (۲) کاهش در محدودیت دوم به اندازه، ۲ واحد با بهتر شدن تابع هدف به ازای ۱۰ واحد  
 (۳) افزایش در محدودیت دوم به اندازه، ۳ واحد با بهتر شدن تابع هدف به اندازه ۶ واحد  
 (۴) کاهش در محدودیت اول به اندازه ۲ واحد با بهتر شدن تابع هدف به اندازه ۶ واحد

مسئله زیر را در نظر بگیرید:

$$\text{Min } Z = x_1$$

$$2x_1 - x_2 \geq 0$$

$$-2x_1 + 3x_2 \geq -6$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

جواب پایه‌ای شدنی با متغیرهای پایه‌ای  $X_1$  و  $S_2$  را در نظر بگیرید و به سؤالات متوالی و مستقل زیر پاسخ دهید.

۱۶- نقطه دوگان متناظر با این پایه:

- (۱) موجه هست ولی بهینه نیست.  
 (۲) موجه نیست ولی بهینه هست.  
 (۳) موجه و بهینه است.  
 (۴) ناموجه و نابهن است.

۱۷- حساسیت تابع هدف بهینه مسئله نسبت به ارزش یک واحد سمت راست محدودیت اول چقدر است؟

- (۱) ۲  
 (۲)  $\frac{1}{2}$   
 (۳)  $-\frac{1}{2}$   
 (۴) -۱

۱۸- حساسیت متغیر  $X_1$  نسبت به افزایش یک واحد سمت راست محدودیت اول چقدر است؟

- (۱)  $\frac{1}{2}$   
 (۲) ۲  
 (۳)  $-\frac{1}{2}$   
 (۴) -۱

۱۹- مسئله زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \text{Max } Z &= C_1x_1 + C_2x_2 \\ 2x_1 + 5x_2 &\leq 28 \\ 3x_1 + 2x_2 &\leq 32 \\ 2x_1 - x_2 &\leq 16 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

اگر جواب بهینه مسئله دوگان به صورت  $(y_1, y_2, y_3) = (2, 0, 3)$  باشد، جواب بهینه  $(x_1, x_2)$  کدام است؟

- (۱)  $(8, 3)$       (۲)  $(9, 2)$       (۳)  $(9, 4)$       (۴)  $(4, 4)$

۲۰- برنامه ریزی تولید سه محصول توسط دو منبع را در نظر بگیرید. جدول بهینه سیمپلکس برای آن به قرار زیر است:

	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$S_1$	$S_2$	
$S_1$	-۳	-۱	۰	۱	-۲	۲۰
$X_2$	۲	۲	۱	۰	۱	۴۰
$Z$	۱۲	۲	۰	۰	۷	۲۸۰

کدام یک از تغییرات زیر باعث می شود، تولید محصول اول اقتصادی گردد؟

- (۱) سود هر واحد محصول اول ۱۰ واحد اضافه شود.
- (۲) میزان مصرف از منبع اول برای هر واحد محصول اول ۵ واحد کم شود.
- (۳) میزان مصرف از منبع دوم برای هر واحد از محصول اول ۲ واحد کم شود.
- (۴) میزان مصرف از منبع برای هر واحد محصول اول، ۳ واحد کم شود.

## تحقیق در عملیات

۱- گزینه ۲ درست است.

در حل فعلی مقدار  $x_2^* = 0$  (نقطه  $F$ ) و چنانچه بخواهیم متغیر  $x_2$  مقدار مثبت بگیرد باید به سمت رأس  $G$  حرکت کنیم. واضح است که متغیر  $x_3$  کاهش یافته ولی متغیر  $x_1$  افزایش می‌یابد.

۲- گزینه ۳ درست است.

$$Ax = b \rightarrow BX_B + NX_N = b \rightarrow X_B = B^{-1}b - B^{-1}NX_N$$

$$\text{Min } Z = C_B B^{-1}b - \sum_{j \in R} (C_B B^{-1}Z_j - C_j)x_j$$

$$IX_B + \sum_{j \in R} B^{-1}a_j x_j = B^{-1}b$$

$$X_B \geq 0 \quad x_j \geq 0 \quad j \in R$$

مسئله معادل است با:

$$\text{Min } Z = C_B B^{-1}b - \sum_{j \in R} (Z_j - C_j)x_j$$

$$\sum_{j \in R} B^{-1}a_j x_j \leq B^{-1}b$$

$$x_j \geq 0 \quad j \in R$$

۳- گزینه ۲ درست است.

$d_2$  جهت رأسی دورشونده مسئله می‌باشد ولی چون  $Cd_2 < 0$  مسئله جواب بی‌کران نخواهد داد.

چون مقدار تابع هدف در دو نقطه رأسی  $x_2$  و  $x_4$  برابر می‌باشد پس یال واصل آن‌ها هم بهینه و مسئله دارای بی‌نهایت جواب بهینه می‌باشد.

۴- گزینه ۴ درست است.

$$S_i = 0 \rightarrow W_i \geq 0$$

۵- گزینه ۴ درست است.

$$W = C_B B^{-1} = (3, 0)$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B^{-1}b = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 6 \\ 17 \end{pmatrix}$$

$$W = C_B B^{-1}b = (3, 0) \begin{pmatrix} 6 \\ 17 \end{pmatrix} = 18$$

۶- گزینه ۲ درست است.

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C_B B^{-1} = (3, 0) \quad Z_3 - C_3 = C_B B^{-1}a_3 - C_3 = (3, 0) \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} - C_3 = 12 - C_3 < 0$$

به ازای  $C_3 > 12$ ، تولید  $X_3$  صرفه اقتصادی خواهد داشت.

۷- گزینه ۱ درست است.

$$\begin{array}{ll} P: \text{Min} & Z = Cx \\ & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array} \quad \begin{array}{ll} D: \text{Max} & wb^t \\ & WA^t \leq C^t \\ & W \text{ آزاد} \end{array} \quad \begin{array}{l} b^t = C \\ A^t = A \end{array} \quad \begin{array}{l} C^t = b \\ \rightarrow D: \text{max} \quad Cw \\ Aw \leq b \end{array}$$

این مسئله چنانچه شدنی باشد، دوگان آن هم حتماً شدنی بوده و در نتیجه هر دو مسئله دارای جواب بهینه متناهی می‌باشد.

۸- گزینه ۳ درست است.

اگر مسئله P چندگانه باشد، D جواب تبهگن دارد.

اگر اگر P غیر تباهیده باشد، D غیر چندگانه (منحصر به فرد) خواهد بود.

۹- گزینه ۳ درست است.

ستون‌های متغیرهای مازاد مصنوعی یک محدودیت همواره قرینه یگدیگرند.

$$f = -\frac{1}{2}$$

۱۰- گزینه ۱ درست است.

$$W = C_B B^{-1} = (0, 3)$$

$$B^{-1}b = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$b_1 + \frac{b_2}{2} = 8$$

$$\frac{b_2}{2} = 2$$

$$b_1 = 6$$

$$b_2 = 4$$

$$d = C_B B^{-1}b = (0, 3) \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} = 12$$

۱۱- گزینه ۲ درست است.

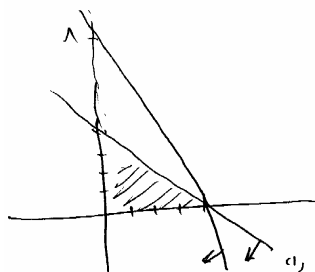
این مسئله حتماً شدنی است (مبدأ، جواب بدیهی دستگاه ناهمگن می‌باشد)

پس دوگان این مسئله هرگز بیکران نخواهد بود.

دوگان می‌تواند شدنی یا نشدنی باشد.

۱۲- گزینه ۱ درست است.

ابتدا باید جواب بهینه به دست می آید تا جواب های دوگان شدن باشد (قیمت سایه ای  $\frac{\partial z}{\partial b_i} = w_i$ )



$$\begin{aligned} x_1^* &= 4 & x_2^* &= 0 & z^* &= 8 \\ x_1 &= 4 & x_2 &= 0 & S_1 &= 0 & S_2 &= 0 \end{aligned}$$

طبق قضیه مکمل زائد  $t_1 = 0$  (متغیر کمکی محدودیت اول دوگان)

$$y_1 + 2y_2 = 2 \quad \text{محدودیت اول دوگان}$$

تنها گزینه ۱ در این معادله صدق می کند.

۱۳- گزینه ۱ درست است.

$$\begin{aligned} X_B &= (X_1, X_2) & X_3 &= 0 \rightarrow \begin{cases} X_1 - X_2 = 6 \\ X_1 &= 8 \end{cases} \\ \text{جواب بهینه} &\rightarrow (X_1 = 8, X_2 = 2, X_3 = 0, S_1 = 0, S_2 = 0) \end{aligned}$$

محدودیت های مسئله ثانویه

طبقه قضیه مکمل زائد

$$\begin{aligned} y_1 + y_2 - t_1 &= 4 \\ -y_1 - t_2 &= C \rightarrow \begin{cases} y_1 = 0 \\ y_2 = 4 \end{cases} \\ y_1 + 2y_2 - t_3 &= 1 \end{aligned}$$

$$t_1 = t_2 = 0$$

$$C = 0$$

۱۴- گزینه ۴ درست است.

قیمت سایه ای منبع چهارم برابر  $\frac{3}{4}$  است و خرید از این منبع تا سقف  $\frac{3}{4}$  مقرون به صرفه خواهد بود.

۱۵- گزینه ۱ درست است.

$$W = (2, 2)$$

دقت شود که باید  $W_1 \geq 0$  و  $W_2 \geq 0$

$$\Delta Z = W_1 \Delta b_1 = 2(-3) = -6 \quad \text{گزینه ۱}$$

$$\Delta Z = W_2 \Delta b_2 = 2(-2) = -4 \quad \text{گزینه ۲}$$

$$\Delta Z = W_3 \Delta b_3 = 2(+3) = +6 \quad \text{گزینه ۳}$$

$$\Delta Z = W_4 \Delta b_4 = 2(-2) = -4 \quad \text{گزینه ۴}$$

۱۶- گزینه ۳ درست است.

$$X_B = (X_1, S_2)$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow B^{-1}b = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$

چون این پایه موجه است پس جواب متناظر در دوگان بهینه می باشد.

$$Z_2 - C_2 = C_B B^{-1} a_2 - C_2 = -\frac{1}{2}$$

$$Z_{S_1} - C_{S_1} = C_B B^{-1} a_{S_1} - C_{S_1} = -\frac{1}{2}$$

$$Z_{S_2} - C_{S_2} = C_B B^{-1} a_{S_2} - C_{S_2} = 0$$

پایه بهینه است پس پایه متناظر در دوگان شدنی می باشد.

۱۷- گزینه ۲ درست است.

$$\frac{\partial z}{\partial b_1} = (C_B B^{-1})_1 = \frac{1}{2}$$

۱۸- گزینه ۱ درست است.

$$\frac{\partial x_1}{\partial b_1} = B^{-1} = \frac{1}{2} \text{ مؤلفه موجود در سطر اول و ستون اول ماتریس}$$

۱۹- گزینه ۲ درست است.

$$(y_1, y_2, y_3) = (2, 0, 3) \xrightarrow{\text{شرط مکمل زائد}} S_1 = 0 \quad S_3 = 0$$

$$2x_1 + 5x_2 = 28$$

$$2x_1 - x_2 = 16$$

$$x_2 = 2$$

$$x_1 = 9$$

۲۰- گزینه ۳ درست است.

$$Y_1 = B^{-1}a_1 \quad \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} \rightarrow a_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$Z_1 - C_1 = 12 \quad C_1 = 2$$

$$1 \text{ گزینه } (Z_1 - C_1)' = 12 - \Delta C = 12 - 10 = 2$$

$$2 \text{ گزینه } (Z_1 - C_1)' = C_B B^{-1}a_1 - C_1 = (0, 7) \begin{pmatrix} 1-5 \\ 2 \end{pmatrix} - 2 = 12$$

$$3 \text{ گزینه } (Z_1 - C_1)' = C_B B^{-1}a_1 - C_1 = (0, 7) \begin{pmatrix} 1 \\ 2-2 \end{pmatrix} - 2 = -2$$

$$4 \text{ گزینه } (Z_1 - C_1)' = (0, 7) \begin{pmatrix} 1-3 \\ 2 \end{pmatrix} - 2 = 12$$