۱- اگر در یک مسأله بهینه سازی تابع هدف غیرخطی باشد و ناحیه شدنی خطی و محدب، در این صورت:

۱) مسأله تنها یک نقطه بهینه خواهد داشت.

۲) مسأله چند نقطه بهینه موضعی دارد.

۳) قطعاً نقاط بهینه مطلق آن روی نقاط مرزی فضای جواب می‌باشد.

۴) نقطه بهینه کلی مسأله می‌تواند، گوشه‌ای، مرزی و یا حتی درونی باشد.

۲- اگر بدانیم در جواب بهینه متغیر کمکی قید دوم در پایه قرار دارد، مقدار بهینه تابع هدف چقدر می‌باشد؟

$$\max Z = x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 + 6x_5$$
$$\text{s.t.} \quad x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + 2x_5 \le 30$$
$$x_1 + x_2 - x_3 - x_4 - x_5 \le 70$$
$$x_1, \dots, x_5 \ge 0$$

۱) ۹۰

۲) ۳۰

۳) ۴۰

۴) ۱۴۰

۳- مسأله $Z = \max\min\{f(y_1), f(y_2)\}$ با فرض $f(y_1) = y_1 + 2$ و $f(y_2) = -3y_2 + 4$ با شرط $y_1 + y_2 = 5$ و $y_1, y_2 \ge 0$ آنگاه مقدار Z^* چقدر است؟

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۴

۴- یک مسأله با ۳ متغیر تصمیم و قیود نامساوی را در نظر بگیرید. فرض کنید این مسأله دارای جواب بهینه چندگانه باشد. در این صورت حداکثر نقاط گوشه‌ای بهینه که این مسأله می‌تواند داشته باشد چه تعداد می‌باشد؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) مشخص نمی‌باشد.

۵- بر اثر افزایش مهارت کارکنان، زمان ساخت یک قطعه رو به کاهش است. این مسأله با این محدودیت، چه نوع برنامه‌ریزی محسوب می‌شود؟

۱) غیرخطی ۲) تصادفی ۳) برنامه‌ریزی خطی ۴) برنامه‌ریزی آرمانی

۶- مسأله دودوئی زیر را در نظر بگیرید:

$$20x_1 + 15x_2 + 12x_3 + 10x_4 \le 25$$
$$x_1 + x_2 = 1$$
$$x_3 + x_4 \le 1$$
$$x_3 \le x_1$$
$$x_4 \le x_2$$
$$x_j = \{0, 1\} \qquad j = 1, \dots, 4$$

اگر تابع هدف به صورت $\max Z = 7x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4$ باشد، مقدار بهینه تابع هدف چقدر است؟

۱) ۷ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۹

۷- در سوال قبل حد بالای تابع هدف با کدام یک از جواب‌ها ساخته می‌شود؟

۱) جواب $x = (1,1,1,1)$ با تابع هدف ۱۹ حد بالای تابع هدف می‌باشد.

۲) جواب $x = (0,1,0,1)$ با تابع هدف ۸ حد بالای تابع هدف می‌باشد.

۳) جواب $x = (1,0,1,0)$ با تابع هدف ۱۱ حد بالای تابع هدف می‌باشد.

۴) جواب $x = (0,0,0,0)$ با تابع هدف صفر حد بالای تابع هدف می‌باشد.

۸-فرض کنید $x = ۰,۲,۴,۶$ باشد. کدام یک از محدودیت‌های زیر نمایش مقادیری است که x به خود می‌گیرد؟

۱) $y_i = ۰$ یا ۱ و $y_۱ + y_۲ + y_۳ \leq ۱$ و $x = ۰y_۱ + ۲y_۲ + ۴y_۳ + ۶y_۴$

۲) $y_i = ۰$ یا ۱ و $y_۲ + y_۳ + y_۴ \leq ۱$ و $x = ۰y_۱ + ۲y_۲ + ۴y_۳ + ۶y_۴$

۳) $y_i = ۰$ یا ۱ و $y_۱ + y_۲ + y_۳ + y_۴ \geq ۱$ و $x = ۰y_۱ + ۲y_۲ + ۴y_۳ + ۶y_۴$

۴) $y_i = ۰$ یا ۱ و $y_۱ + y_۲ + y_۳ + y_۴ \geq ۲$ و $x = ۰y_۱ + ۲y_۲ + ۴y_۳ + ۶y_۴$

۹-ماتریس ضرایب حمل و نقل متوازن با m مبدأ و n مقصد را در نظر بگیرید:

۱) ۲mn عنصر یک دارد.

۲) mn(m+n -۲) عنصر صفر دارد.

۳) mn عنصر یک دارد.

۴) گزینه‌های ۱ و ۲

۱۰- مسأله حمل و نقل متوازن با m مبدأ و n مقصد را در نظر بگیرید که در آن s_iها عرضه و d_jها تقاضاها می‌باشند و $\sum_i s_i = \sum_j d_j = d$ است. کدام گزینه صحیح است؟

۱) $x_{ij} = \frac{s_i d_j}{d}$ به ازای $\forall(i,j)$، یک جواب شدنی است.

۲) $x_{ij} = \frac{d}{s_i d_j}$ به ازای $\forall(i,j)$، یک جواب شدنی است.

۳) $x_{ij} = \frac{s_i}{d d_j}$ به ازای $\forall(i,j)$، یک جواب شدنی است.

۴) $x_{ij} = \frac{d_j}{s_i d}$ به ازای $\forall(i,j)$، یک جواب شدنی است.

۱۱- مقدار بهینه تابع هدف مسأله زیر کدام است؟

$$
\begin{aligned}
\min f(x) &= -۶x_۱ - ۴x_۲ + x_۱^۲ + x_۲^۲ \\
\text{s.t.} \quad & -x_۱ + x_۲ \leq ۲ \\
& x_۱ + x_۲ \leq ۶ \\
& x_۱ \leq ۵ \\
& -x_۲ \leq ۰ \\
& -x_۱ \leq -۱
\end{aligned}
$$

۱) -۱۳ ۲) -۱۲ ۳) -۱۴ ۴) -۱۵

۱۲- در سوال قبل در نقطه بهینه $x_۱$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۵

۱۳-کدام یک از مسائل زیر تفکیک پذیر نمی‌باشد؟

۱) $f(x_۱, x_۲) = x_۱^۳ - ۲x_۱^۲ + x_۱ + x_۲^۴ - x_۲$

۲)
$$
\begin{aligned}
& f(x_۱, x_۲) = ۳x_۱ + ۲x_۲ \\
\text{s.t.} \quad & ۴x_۱^۲ + x_۲^۲ \leq ۱۶ \\
& x_۱, x_۲ \geq ۰
\end{aligned}
$$

۳)
$$
\begin{aligned}
& f(x_۱, x_۲) = ۳x_۱^۲ + ۲x_۲^۲ \\
\text{s.t.} \quad & |۴x_۱ - x_۲| \leq ۲ \\
& x_۱, x_۲ \geq ۰
\end{aligned}
$$

۴)
$$
\begin{aligned}
& f(x_۱, x_۲) = ۴x_۱^۲ + ۳x_۲^۲ \\
\text{s.t.} \quad & |x_۱ + x_۲| \geq ۴ \\
& x_۱, x_۲ \geq ۰
\end{aligned}
$$

۱۴-مسأله غیرخطی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned}
\min f(x) &= -۴x_۱ - ۱۰x_۲ + x_۱^۲ + x_۲^۲ \\
\text{s.t.} \quad g_۱(x) &= -x_۱ + x_۲ - ۲ \le ۰ \\
g_۲(x) &= x_۱ + x_۲ - ۶ \le ۰ \\
g_۳(x) &= x_۱ - ۵ \le ۰ \\
g_۴(x) &= -x_۲ \le ۰ \\
g_۵(x) &= -x_۱ + ۱ \le ۰
\end{aligned}$$

کدام گزینه صحیح است؟

۱) $-\nabla f(x^\circ)$ در مخروط حاصل از گرادیان $g_۱(x)$ و $g_۲(x)$ قرار می‌گیرد که در آن نقطه x° حاصل از برخورد $g_۱(x)=۰$ با $g_۲(x)=۰$ می‌باشد.

۲) $\nabla f(x^\circ)$ در مخروط حاصل از گرادیان $g_۱(x)$ و $g_۲(x)$ قرار می‌گیرد که در آن نقطه x° حاصل از برخورد $g_۱(x)=۰$ با $g_۲(x)=۰$ می‌باشد.

۳) $-\nabla f(x^\circ)$ در مخروط حاصل از گرادیان $g_۱(x)$ و $g_۵(x)$ قرار می‌گیرد که در آن x° نقطه حاصل از برخورد $g_۱(x)=۰$ با $g_۵(x)=۰$ می‌باشد.

۴) $\nabla f(x^\circ)$ در مخروط حاصل از گرادیان $g_۱(x)$ و $g_۵(x)$ قرار می‌گیرد که در آن x° نقطه حاصل از برخورد $g_۱(x)=۰$ با $g_۵(x)=۰$ می‌باشد.

۱۵-مسأله برنامه‌ریزی غیرخطی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned}
&\max f(x) \\
&\text{s.t.} \quad g_i(x) \le b_i \qquad i = ۱,\dots,m \\
&\qquad\quad x \ge ۰
\end{aligned}$$

اگر بگیریم $B(x) = \sum_{i=۱}^{m} \frac{۱}{b_i - g_i(x)} + \sum_{j=۱}^{n} \frac{۱}{x_j}$

اگر x^* نقطه بهینه مسأله اصلی باشد (که مجهول است) و به جای آن $\overline{x}$ انتخاب شود و حداکثر خطای تابع هدف را برابر $rB(x)$ بگیریم در روش SUMT شرط توقف کدام است؟

۱) $f(\overline{x}) \le f(x^*) \le f(\overline{x}) + rB(\overline{x})$

۲) $f(\overline{x}) = r(B\overline{x})$

۳) $f(x^*) \le f(\overline{x}) \le f(x^*) + rB(\overline{x})$

۴) $f(x^*) = rB(\overline{x})$

۱۶-در برنامه‌ریزی غیرمحدب کدام یک از روش‌های تکراری برای به دست آوردن نقطه بهینه پیشنهاد می‌شود؟

۱) فرانک- ولف ۲) SUMT ۳) جستجوی گرادیان ۴) نیوتن- رافسون

۱۷-مسأله زیر را در نظر بگیرید که می‌خواهیم آن را با پویای پسرو حل کنیم:

$$\begin{aligned}
&\min y = \max\{f(y_۱), f(y_۲), f(y_۳)\} \\
&\text{s.t.} \quad \sum_{i=۱}^{۳} y_i = ۱۰ \\
&\qquad\quad y_i \ge ۰
\end{aligned}$$

$f(y_۱) = y_۱ - ۳$ و $f(y_۲) = ۵y_۲ + ۳$ و $f(y_۳) = y_۳ + ۵$ می‌باشد. R_n را بگیرید میزان باقی‌مانده از سمت راست محدودیت مسأله فوق، در ابتدای مرحله n ام مقدار $y_۲$ در مرحله دوم کدام است؟

۱) صفر ۲) $R_۲$ ۳) $R_۲ + ۲$ ۴) $\frac{R_۲ + ۲}{۶}$

۱۸-جدول یک مسأله LP آزاد شده از مسأله ILP با فرض صحیح بودن تمام متغیرها را در نظر بگیرید. برش مربوط به $x_۲$ در جدول کدام است؟

	$x_۱$	$x_۲$	$S_۱$	$S_۲$	
$x_۱$	۱	۰	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۵}{۳}$	$\frac{۶}{۷}$
$x_۲$	۰	۱	$\frac{۱}{۳}$	$\frac{۱}{۶}$	$\frac{۵}{۲}$

۱) $-\frac{۱}{۳}S_۱-\frac{۱}{۶}S_۲\le-\frac{۱}{۲}$

۲) $\frac{۱}{۳}S_۱+\frac{۱}{۶}S_۲\le\frac{۱}{۲}$

۳) $\frac{۱}{۶}S_۱+\frac{۱}{۳}S_۲\le\frac{۱}{۲}$

۴) $-\frac{۱}{۶}S_۱-\frac{۱}{۳}S_۲\le-\frac{۱}{۲}$

۱۹-مسأله غیرخطی را در نظر بگیرید که تابع هدف آن $\min f(x)$ و بدون محدودیت می‌باشد. برای حل با روش جستجوی گرادیان کدام گزینه صحیح است؟

۱) $f\left(x'-t^*\nabla f(x')\right)=\max\limits_{t\ge ۰} f\left(x'-t\nabla f(x')\right)$

۲) $f\left(x'-t^*\nabla f(x')\right)=\min\limits_{t\ge ۰} f\left(x'-t\nabla f(x')\right)$

۳) $f\left(x'+t^*\nabla f(x')\right)=\max\limits_{t\ge ۰} f\left(x'+t\nabla f(x')\right)$

۴) $f\left(x'+t^*\nabla f(x')\right)=\min\limits_{t\ge ۰} f\left(x'+t\nabla f(x')\right)$

۲۰- جدول بازده یک بازی دو نفره مجموع صفر را در نظر بگیرید:

A \ B	۱	۲	۳
۱	۰	-۲	۲
۲	۵	۴	-۳

کدام گزینه صحیح است؟

۱) احتمال آنکه بازیکن A بازی اول را انجام دهد $\frac{۶}{۱۱}$ بازی دوم را انجام دهد $\frac{۵}{۱۱}$ می‌باشد.

۲) احتمال آنکه بازیکن A بازی اول را انجام دهد $\frac{۷}{۱۱}$ بازی دوم را انجام دهد $\frac{۴}{۱۱}$ می‌باشد.

۳) احتمال آنکه بازیکن A بازی اول را انجام دهد $\frac{۴}{۱۱}$ بازی دوم را انجام دهد $\frac{۷}{۱۱}$ می‌باشد.

۴) احتمال آنکه بازیکن A بازی اول را انجام دهد $\frac{۵}{۱۱}$ بازی دوم را انجام دهد $\frac{۶}{۱۱}$ می‌باشد.

پاسخ

۱ - گزینه «۴» صحیح است.

در یک مسأله غیرخطی نقطه بهینه می‌تواند یکی از نقاط گوشه‌ای یا مرزی یا درونی باشد.

۲ - گزینه «۱» صحیح است.

چون متغیر کمکی قید دوم پایه‌ای می‌باشد پس متغیر دوم دوگان در بهینگی صفر می‌باشد پس به راحتی می‌توان دوگان را بدون متغیر دوم نوشت.

$\min ۳۰w_۱$

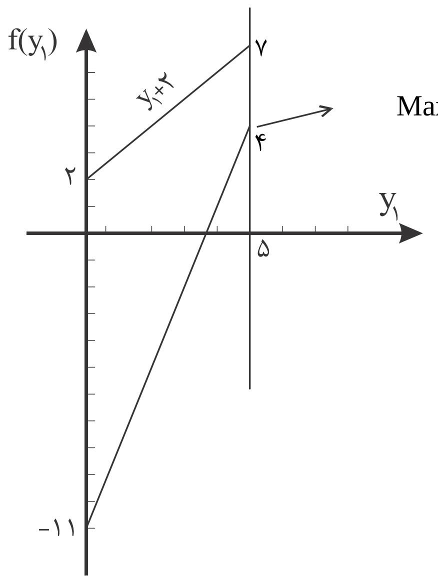
$$\left.\begin{array}{ll} w_۱ \ge ۱ & \Rightarrow w_۱ \ge ۱ \\ ۲w_۱ \ge ۲ & \Rightarrow w_۱ \ge ۱ \\ w_۱ \ge -۳ & \Rightarrow w_۱ \ge -۳ \\ ۳w_۱ \ge ۴ & \Rightarrow w_۱ \ge \frac{۴}{۳} \\ ۲w_۱ \ge ۶ & \Rightarrow w_۱ \ge ۳ \end{array}\right\} \Rightarrow w_۱ \ge ۳ \Rightarrow \min ۳۰w_۱ = ۳۰ \times ۳ = ۹۰$$

۳ - گزینه «۴» صحیح است.

$f(y_۱) = y_۱ + ۲$

$$\begin{cases} f(y_۲) = -۳y_۲ + ۴ \\ y_۲ = ۵ - y_۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(y_۱) = -۳(۵ - y_۱) + ۴ = ۳y_۱ - ۱۱ \\ ۰ \le y_۱ \le ۵ \end{cases}$$

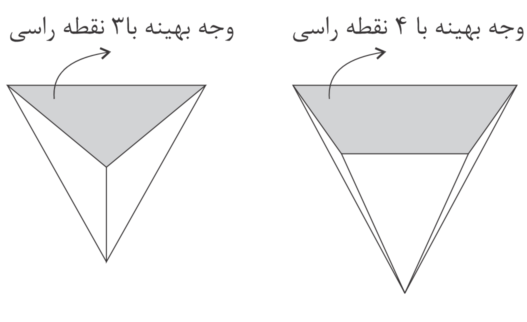
تابع $f(y_۱)$ را با فرض $۰ \le y_۱ \le ۵$ رسم می‌کنیم:



$$\text{MaxMin}\left(y_۱ + ۲\,,\, ۳y_۱ - ۱۱\right) \Rightarrow \begin{cases} y_۱ = ۵ \\ y_۲ = ۰ \end{cases} \Rightarrow Z^* = ۴$$

۴ - گزینه «۴» صحیح است.

چون فضای جواب حداکثر می‌تواند ۳ بعدی باشد و وجهی که بهینه می‌شود معلوم نیست که چند نقطه گوشه‌ای دارد بنابراین نمی‌توان اظهار نظر کرد.



و همینطور با تعداد نقاط راسی بیشتر ●●●

۵ - گزینه «۱» صحیح است.

چون نسبت مهارت کارکنان با زمان رابطه خطی ندارد، پس فرض تناسب در مسأله رعایت نمی‌شود.

۶ - گزینه «۲» صحیح است.

قرار دهید $x = (۰,۱,۰,۱)$ مقدار تابع هدف $Z = ۸$ خواهد شد که این جواب موجه با بیشترین مقدار است.

۷- گزینه «۱» صحیح است.

جواب $x=(1,1,1,1)$ با $Z=19$ حد بالای تابع هدف می‌باشد که هر چند این جواب موجه نمی‌باشد ولی مقدار تابع هدف تمام جواب‌های مسأله از ۱۹ بیشتر نخواهد شد.

۸- گزینه «۲» صحیح است.

چون برای $x=0$ هم یک متغیر y_1 در نظر گرفته شده پس $y_1+y_2+y_3+y_4=1$ و $y_i=0$ یا ۱ می‌باشند. که می‌توان آن را $y_2+y_3+y_4 \quad 1$ هم نوشت زیرا ضریب y_1 صفر می‌باشد.

۹- گزینه «۴» صحیح است.

ماتریس ضرایب حمل و نقل متوازن کلا دارای $(m+n)mn$ عنصر، $2mn$ عنصر یک و $mn(m+n-2)$ عنصر صفر می‌باشد.

۱۰- گزینه «۱» صحیح است.

در هر مسأله حمل و نقل متوازن همواره $x_{ij}=\frac{s_i d_j}{d}$ که در آن $d=\sum_i s_i=\sum_j d_j$ می‌باشد یک جواب شدنی است.

۱۱-گزینه «۱» صحیح است.

$$f(x)=(x_1^2-6x_1+9)+(x_2^2-4x_2+4)-9-4$$
$$f(x)=(x_1-3)^2+(x_2-2)^2-13$$

با توجه به تابع به دست آمده واضح است که حداقل مقدار تابع زمانی اتفاق می‌افتد که $x_1=3$ و $x_2=2$ باشد که $f^*(x)=-13$ خواهد شد. توجه شود که $x=(3,2)$ یک جواب موجه هم برای مسأله می‌باشد.

۱۲- گزینه «۱» صحیح است.

با توجه به حل سوال قبل گزینه (۱) صحیح است.

۱۳- گزینه «۴» صحیح است.

از آنجایی که ناحیه گزینه (۴) محدب نمی‌باشد پس مسأله تفکیک پذیر نمی‌باشد.

۱۴- گزینه «۱» صحیح است.

هدف سوال به دست آوردن نقطه بهینه می‌باشد.

$g_2(x)$ و $g_1(x)$ نقطه محل برخورد $\Rightarrow \begin{cases}-x_1+x_2=2\\ x_1+x_2=6\end{cases} \Rightarrow x=(2,4)\Rightarrow f(2,4)=-28$

$g_5(x)$ و $g_1(x)$ نقطه محل برخورد $\Rightarrow \begin{cases}-x_1+x_2=2\\ -x_1 \quad =-1\end{cases} \Rightarrow x=(1,3)\Rightarrow f(1,3)=-21$

پس چون $f(2,4)<f(1,3)$ می‌باشد بنابراین نقطه $x=(2,4)$ مقدار تابع هدفش بهتر می‌باشد و از آنجایی که تابع هدف حداقل سازی می‌باشد پس با شرط K.K.T. داریم:

$$\nabla f(x)=\sum_{i=1}^{5}\lambda_i\nabla g_i(x)$$
$$\lambda_i\le 0$$
$$\boxed{\begin{array}{c}-\nabla f(x)=\sum\mu_i\nabla g_i(x)\\ \mu_i\ge 0\end{array}}$$

و چون نقطه محل برخورد $g_1(x)$ و $g_2(x)$ بهینه می‌باشد پس داریم:

$$-\nabla f(x)=\mu_1\nabla g_1(x)+\mu_2\nabla g_2(x)$$
$$\mu_1,\mu_2\ge 0$$

۱۵- گزینه «۱» صحیح است.

اگر x^* جواب بهینه مسأله اصلی باشد، لذا چنانچه به جای x^* مقدار $\overline{x}$ انتخاب شود حداکثر خطای تابع هدف برابر است با $rB(\overline{x})$ و ادامه کار باعث تقلیل خطا می‌شود. پس:

$$f(\overline{x})\le f(x^*)\le f(\overline{x})+rB(\overline{x})$$

۱۶- گزینه «۲» صحیح است.

روش SUMT روشی است برای مسائل غیرخطی غیرمحدب.

۱۷- گزینه «۴» صحیح است.

تابع در مرحله سوم $f(3, R_3, y_3) = y_3 + 5$ و $f^*(3, R_3) = R_3 + 5$ می‌باشد.

تابع مرحله دوم:

$$f(2, R_2, y_2) = \min\max\{5y_2 + 3 , R_2 - y_2 + 5\}$$

$$5y_2 + 3 = R_2 - y_2 + 5 \Rightarrow y_2 = \frac{R_2 + 2}{6}$$

۱۸- گزینه «۱» صحیح است.

$$\bar{b}_2 = \frac{5}{2} \quad y_{23} = \frac{1}{3} \quad y_{24} = \frac{1}{6}$$

$$\Downarrow \quad\quad \Downarrow \quad\quad \Downarrow$$

$$f_2 = \frac{1}{2} \quad f_{23} = \frac{1}{3} \quad f_{24} = \frac{1}{6}$$

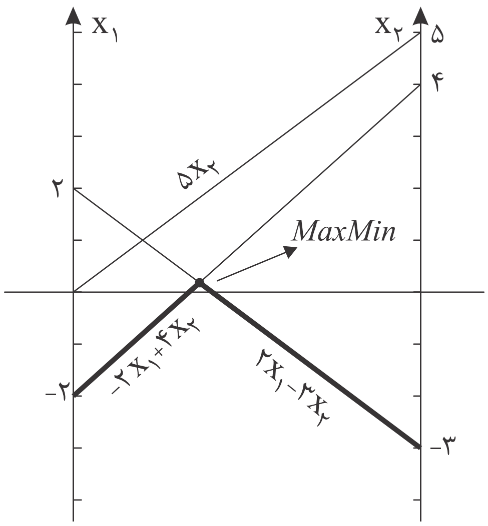
$$f_2 - (f_{23}S_1 + f_{24}S_2) \le 0$$

$$\frac{1}{2} - (\frac{1}{3}S_1 + \frac{1}{6}S_2) \le 0 \Rightarrow -\frac{1}{3}S_1 - \frac{1}{6}S_2 \le -\frac{1}{2}$$

۱۹- گزینه «۲» صحیح است.

از آنجایی که تابع هدف می‌نیمم می‌باشد بنابراین خلاف جهت گرادیان حرکت خواهیم کرد و توجه شود که در تمام گزینه‌ها $t \ge 0$ نوشته شده است.

۲۰- گزینه «۲» صحیح است.



$$\begin{cases} -2x_1 + 4x_2 = 2x_1 - 3x_2 \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{7}{11} \\ x_2 = \frac{4}{11} \end{cases}$$