۱- مسأله پارامتریک ماکزیمم‌سازی زیر به ازای چه مقدار θ بهینه خواهد بود؟ $(\theta \geq ۰)$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
Z	۰	$۹-۲\theta$	۰	$۱۱-۲\theta$	$۲-\frac{۱}{۳}\theta$	$۲۴۰-۳۶\theta$
x_1	۱	۶	۰	$\frac{۲}{۳}$	$-\frac{۱}{۶}$	۶
x_3	۰	۱-	۱	$-\frac{۱}{۳}$	$\frac{۱}{۳}$	۱۲

۱) $۰ \leq \theta \leq \frac{۹}{۲}$
۲) $۰ \leq \theta \leq \frac{۱۱}{۲}$
۳) $۰ \leq \theta \leq \frac{۲۰}{۳}$
۴) $۰ \leq \theta \leq ۹$

۲-مدل استفاده برای فرموله کردن توزیع گندم‌های وارداتی از طریق بنادر به سیلوها و از سیلوها به کارخانجات آردسازی چیست؟

۱) برنامه‌ریزی خطی
۲) حمل و نقل ساده
۳) حمل و نقل مرکب
۴) حمل و نقل مرکب و برنامه‌ریزی خطی

۳-جواب بهینه مسأله تخصیص زیر کدام است؟

فرد \ شغل	A	B	C	D
۱	۱	۰	۰	۱
۲	۱	۰	۲	۰
۳	۱	۱	۰	۰
۴	۰	۰	۲	۰

۱) $۱ \to B$ ، $۲ \to D$ ، $۳ \to C$ ، $۴ \to A$
۲) $۱ \to C$ ، $۲ \to B$ ، $۳ \to D$ ، $۴ \to A$
۳) $۱ \to C$ ، $۳ \to D$ ، $۲ \to B$ ، $۴ \to A$
۴) همه موارد

۴-محدودیت‌های فعال در نقطه بهینه در مسأله حداکثرسازی با علامت $\leq$، محدودیت‌هایی هستند که دارای قیمت‌های سایه‌ای ....

۱) صفر باشند.
۲) کوچک‌تر یا مساوی صفر باشند.
۳) مثبت باشند.
۴) بزرگ‌تر یا مساوی صفر باشند.

۵-یک مدل حمل و نقل متوازن را در نظر بگیرید.

۱) اگر حداقل یکی از $c_{ij}-(u_i+v_j)$ ها مثبت باشد، به بهینگی رسیده‌ایم.
۲) اگر تمام $c_{ij}-(u_i+v_j)$ ها مثبت یا صفر باشند، به بهینگی رسیده‌ایم.
۳) اگر تمام $c_{ij}-(u_i+v_j)$ ها منفی یا صفر باشند، به بهینگی رسیده‌ایم.
۴) اگر حداقل یکی از $c_{ij}-(u_i+v_j)$ ها منفی باشد، به بهینگی رسیده‌ایم.

جدول اول و نهایی یک مدل برنامه‌ریزی خطی به صورت زیر می‌باشد و تابع هدف به صورت max و محدودیت‌ها به فرم $\leq$ هستند. متغیرهای کمکی x_3 و x_4 می‌باشند. به ۵ سوال بعد پاسخ دهید.

	x_1	x_2	x_3	x_4	
Z	−۳۰	−۱۰	۰	۰	۰
x_3	۲	۱	۱	۰	۴
x_4	۲	۲	۰	۱	۶

جدول اول

	x_1	x_2	x_3	x_4	
Z	۰	۵	۱۵	۰	۶۰
x_1	۱	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	۰	۲
x_4	۰	۱	−۱	۱	۲

جدول نهایی

۶- حداقل افزایش در ضریب x_2 در تابع هدف چقدر باشد تا این فعالیت مقرون به صرفه گردیده و وارد پایه شود؟

۱) ۷ ۲) ۱۵ ۳) ۵ ۴) ۱۰

۷- مقدار سمت راست محدودیت دوم چقدر می‌تواند کاهش یا افزایش یابد تا جواب فعلی قابل قبول باقی بماند؟

۱) کاهش ۱ واحد، افزایش ۱۰ واحد ۲) کاهش ۲ واحد، افزایش ∞

۳) کاهش ∞ واحد، افزایش ۵ واحد ۴) کاهش ∞ واحد، افزایش ۲ واحد

۸- با توجه به جدول نهایی داده شده به ازای هر واحد افزایش مقدار سمت راست محدودیت اول چقدر به تابع هدف اضافه می‌شود؟

۱) ۱۰ واحد ۲) ۱۲ واحد ۳) ۲۰ واحد ۴) ۱۵ واحد

۹- با توجه به جدول نهایی داده شده اگر اضافه کردن محدودیت جدید $4x_1 + x_2 = 4$ روی مدل اصلی چیست؟

۱) موثر است و جواب جدید $x_1^* = \frac{1}{2}, x_2^* = \frac{8}{3}$ ۲) موثر است و جواب جدید $x_1^* = \frac{1}{3}, x_2^* = \frac{8}{3}$

۳) موثر است و جواب جدید $x_1^* = \frac{1}{4}, x_2^* = \frac{10}{3}$ ۴) بدون اثر است.

۱۰- با توجه به جدول نهایی داده شده در صورتی که x_4, x_3 میزان منابع باقی مانده را نشان دهند، اگر قیمت هر واحد از منبع اول در بازار ۱۷ و منبع دوم ۱۴ باشد:

۱) خرید منبع اول و دوم به صرفه است. ۲) فقط خرید منبع دوم به صرفه است.

۳) فقط خرید منبع اول به صرفه است. ۴) خرید هیچ کدام از منابع به صرفه نیست.

۱۱- مسأله برنامه‌ریزی پویای زیر را در نظر بگیرید.

$$\max Z = x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_3^2$$
$$x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 8$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0 \text{ و صحیح}$$

اگر در مرحله سوم حالت برابر ۷ و تصمیم برابر ۲ باشد مقدار تابع هدف چقدر است؟

۱) ۱۶ ۲) ۴ ۳) ۸ ۴) چنین چیزی وجود ندارد.

۱۲- در سوال قبل تعداد حالت‌ها و تصمیم‌ها در مرحله دوم چند است؟

۱) حالت = ۹ ، تصمیم = ۵ ۲) حالت = ۸ ، تصمیم = ۴ ۳) حالت = ۴ ، تصمیم = ۴ ۴) حالت = ۴ ، تصمیم = ۵

۱۳- مسأله زیر را در نظر بگیرید:

$$\max \sum_{i=1}^{3} P(i, s_i, x_i)$$
$$\text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^{3} x_i = 5$$
$$x_i \geq 0 \text{ , صحیح } \quad i = 1,2,3$$

در صورت حل مسأله با برنامه‌ریزی پویای پسرو در مرحله **n** ام روند حل کدام است؟

۱) $f(n, s_n, x_n) = P(n, s_n, x_n) + \max \sum_{i=n+1}^{3} p(i, s_i, x_i)$

۲) $\begin{cases} f(n, s_n, x_n) = P(n, s_n, x_n) + \max \sum_{i=n+1}^{3} p(i, s_i, x_i) \\ \sum_{i=n}^{3} x_i = S_n \end{cases}$

۳) $\begin{cases} f(n, s_n, x_n) = P(n, s_n, x_n) \times \max \sum_{i=n+1}^{3} p(i, s_i, x_i) \\ \sum_{i=n}^{3} x_i = S_n \end{cases}$

۴) $\begin{cases} f(n, s_n, x_n) = P(n, s_n, x_n) + \sum_{i=n+1}^{3} p(i, s_i, x_i) \\ \prod_{i=n}^{3} x_i = S_n \end{cases}$

۱۴- در حل یک مسأله **ILP** با برنامه‌ریزی پویا تعداد متغیرهای حالت ....

۱) به تعداد متغیرها ربط دارد. ۲) به تعداد محدودیت‌ها ربط دارد.

۳) به تعداد محدودیت‌ها بعلاوه تعداد متغیرها ربط دارد. ۴) به تعداد درجه متغیرها در تابع هدف ربط دارد.

۱۵- در یک مسأله برنامه‌ریزی آرمانی فرض کنید یکی از اهداف به صورت $f_1(x) = c^1x$ باشد و آرمان آن Z_1 باشد و متغیرهای انحراف آن‌ها هم d_1^+ و d_1^- باشد به صورت زیر:

$$c^1x + d_1^- - d_1^+ = Z_1$$

در صورتی که هدف آن باشد که c^1x بیشتر از Z_1 باشد کدام متغیر انحراف باید در تابع هدف قرار داده شود؟

۱) d_1^+ ۲) d_1^- ۳) d_1^-, d_1^+ ۴) هیچ کدام

۱۶- در سوال قبل در صورتی که بخواهیم c^1x تا حد ممکن به Z_1 نزدیک شود کدام متغیر انحراف باید در تابع هدف قرار بگیرد.

۱) d_1^+ ۲) d_1^- ۳) d_1^+, d_1^- ۴) هیچ کدام

۱۷-یک مسأله حداکثر جریان را در نظر بگیرید که در آن u_{ij} ظرفیت هر کدام از کمان‌ها می‌باشد و **f** جریانی است که از گره ابتدا به گره انتها ارسال می‌شود. برش $\alpha\beta$ را در نظر بگیرید که در آن **X** مجموعه گره‌هایی است که با گره ابتدا در یک طرف برش می‌باشند. آنگاه کدام گزینه صحیح می‌باشد؟

۱) $f \le \sum\limits_{\substack{i\in X \\ j\in \bar{X}}} u_{ij}$
۲) $f \ge \sum\limits_{\substack{i\in X \\ j\in \bar{X}}} u_{ij}$
۳) $f = \sum\limits_{\substack{i\in X \\ j\in \bar{X}}} u_{ij}$
۴) $f - \sum\limits_{\substack{i\in X \\ j\in \bar{X}}} u_{ij} = ۲f$

۱۸-بازی دونفره زیر را در نظر بگیرید:

A \ B	۱	۲	۳
۱	۳	-۱	-۳
۲	-۳	۳	-۱
۳	-۴	-۳	۳

نقطه زینی این مسأله کدام است؟

۱) (۳ , ۳-)
۲) (۳- , ۳)
۳) (۱ , ۱)
۴) نقطه زینی ندارد.

۱۹-ماتریس بازده $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید که بازیکن **A** استراتژی **(x,y)** و بازیکن **B** استراتژی **(u,v)** را انتخاب می‌کنند که

$$x + y = u + v = ۱ \qquad x, y, u, v \ge ۰$$

برقرار است. کدام گزینه صحیح است؟

۱) افزودن مقدار ثابت $k > ۰$ به هر یک از عناصر ماتریس بازده به اندازه k واحد به ارزش بهینه اضافه می‌شود.
۲) با ضرب هر یک از عناصر ماتریس بازده در عدد ثابت $k > ۰$، ارزش بهینه در k ضرب می‌شود.
۳) در گزینه‌های ۱و۲ استراتژی‌های بهینه هیچ تغییری نمی‌کنند.
۴) تمام گزینه‌ها

۲۰- جدول بازی ۴×۲ زیر را در نظر بگیرید:

A \ B	۱	۲	۳	۴
۱	۲	۲	۳	-۱
۲	۴	۳	۲	۶

استراتژی بهینه بازیکن **A** کدام است؟

۱) $(\frac{۱}{۳}, \frac{۲}{۳})$
۲) $(\frac{۳}{۴}, \frac{۱}{۴})$
۳) $(\frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۲})$
۴) $(\frac{۵}{۶}, \frac{۱}{۶})$

پاسخ

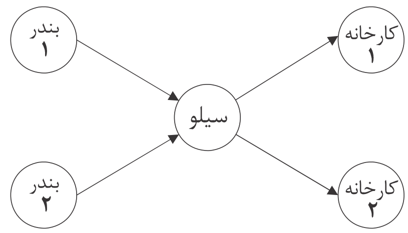
۱ -گزینه «۱» صحیح است.

شرایط بهینگی در max سازی $z_j - c_j \geq ۰$ می‌باشد.

$$\left.\begin{array}{l} ۹-۲\theta \geq ۰ \Rightarrow \theta \leq \frac{۹}{۲} \\ ۱۱-۲\theta \geq ۰ \Rightarrow \theta \leq \frac{۱۱}{۲} \\ ۲-\frac{۱}{۳}\theta \geq ۰ \Rightarrow \theta \leq ۶ \end{array}\right\} \Rightarrow \theta \leq \frac{۹}{۲} \Rightarrow ۰ \leq \theta \leq \frac{۹}{۲}$$

۲ - گزینه «۴» صحیح است.

یک مسأله با ۲ بندر، یک سیلو و ۲ کارخانه را در نظر بگیرید:



ملاحظه می‌شود که این مسأله یک حمل و نقل مرکب می‌باشد، زیرا گره سیلو می‌تواند هم نقش مبدأ و هم نقش مقصد را داشته باشد. در ضمن هر مسأله حمل و نقل یک مسأله برنامه‌ریزی خطی هم می‌باشد.

۳ - گزینه «۴» صحیح است.

چون مسأله هیچ صفر مستقل ندارد پس حتماً جواب بهینه چندگانه دارد. که تمام جواب‌های موجود در گزینه‌ها بهینه می‌باشند. برای چک کردن گزینه‌ها فقط توجه شود که صفر انتخاب شده باشد و یک کار به دو فرد و یا یک فرد به ۲ کار داده نشده باشد.

۴ - گزینه «۴» صحیح است.

از آنجایی که مسأله max سازی و قیود $\le$ می‌باشند پس تمام متغیرهای دوگان $w_i \ge 0$ می‌باشند (چون فرم کانونی max است) و چون قیود فعال می‌باشند بنابراین $S_i = 0$ می‌باشد که متغیر دوگان آن می‌تواند مثبت و یا حتی صفر هم بشود (در صورت تباهیدگی دوگان).

۵ - گزینه «۲» صحیح است.

شرایط بهینگی $\Rightarrow z_{ij} - c_{ij} = u_i + v_j - c_{ij} \le 0$

پس اگر $c_{ij} - (u_i + v_j) \ge 0$ باشند به بهینگی رسیده‌ایم.

۶- گزینه «۳» صحیح است.

چون x_2 غیرپایه‌ای می‌باشد می‌نویسیم:

$$(Z_2 - C_2)_{\text{جدید}} = (Z_2 - C_2)_{\text{قدیم}} + \left(C_2 - (C_2 + \Delta)\right) \le 0$$
$$\Rightarrow 5 + (-\Delta) \le 0 \Rightarrow \Delta \ge 5$$

۷- گزینه «۲» صحیح است.

$$B^{-1}\begin{bmatrix}4\\6+\Delta_2\end{bmatrix} \ge 0 \Rightarrow B^{-1}\begin{bmatrix}4\\6\end{bmatrix} + B^{-1}\begin{bmatrix}0\\\Delta_2\end{bmatrix} \ge 0$$
$$\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\\Delta_2\end{bmatrix} \ge 0 \Rightarrow \Delta_2 \ge -2$$

۸- گزینه «۴» صحیح است.

$$\Delta Z = \Delta b_1 w_1 \Rightarrow \Delta Z = (+1)(15) = +15$$

۹- گزینه «۲» صحیح است.

نقطه بهینه مسأله $x^* = (2,0)$ می‌باشد که در قید جدید صدق نمی‌کند. پس محدودیت جدید برای نقطه بهینه موثر می‌باشد.

نقطه بهینه جدید پس از اضافه کردن محدودیت جدید و حل آن با DS باید حتماً روی قید جدید قرار داشته باشد که فقط گزینه (۲) می‌تواند صحیح باشد زیرا:

$$4 \times \frac{1}{3} + \frac{8}{3} = \frac{12}{3} = 4$$

۱۰-گزینه «۳» صحیح است.

چون $x_4 > 0$ داخل پایه می‌باشد پس منبع دوم اضافه داریم و خرید از آن اصلاً با هر قیمتی صرف ندارد. فقط از منبع اول می‌توانیم خرید کنیم آن هم با قیمت حداکثر ۱۵ زیرا قیمت سایه آن ۱۵ می‌باشد.

۱۱-گزینه «۴» صحیح است.

اگر حالت برابر ۷ باشد یعنی باقی مانده از سمت راست محدودیت برابر ۷ است یعنی $s_3 = 7$ می‌باشد. محدودیت را در مرحله سوم در نظر بگیرید.

$$4x_3 \le s_3 = 7$$

در این حالت $x_3 = 2$ نمی‌تواند باشد یعنی تصمیم برابر ۲ نخواهد شد.

۱۲- گزینه «۱» صحیح است.

s_3 \ x_3	۰	۱	۲	۳	۴
۰					
۱					
۲					
۳					
۴					
۵					
۶					
۷					
۸					

باقی‌مانده از سمت راست محدودیت را حالت می‌گیریم

محدودیت به صورت $۲x_۲ \leq s_۲$ می‌باشد که اگر در نهایت $s_۲ = ۸$ باشد مقادیری که $x_۲$ می‌تواند به خودش بگیرد ۴ یا ۳ یا ۲ یا ۱ یا $x_۲ = ۰$ می‌باشد. پس در مرحله دوم تعداد تصمیم‌ها برابر ۵ می‌باشد.

۱۳- گزینه «۲» صحیح است.

$$f(n,s_n,x_n) = P(n,s_n,x_n) + f^*(n+۱\,,\,s_{n+۱})$$

$$f(n,s_n,x_n) = P(n,s_n,x_n) + \max \sum_{i=n+۱}^{۳} p(i,s_i,x_i)$$

که در آن $s_n = ۵ - \sum_{i=۱}^{n-۱} x$ می‌باشد پس داریم $\sum_{i=n}^{۳} x_i = s_n$

۱۴- گزینه «۲» صحیح است.

در مسائل LP ،ILP و NLP با برنامه‌ریزی پویا، تعداد متغیرهای حالت به تعداد محدودیت‌ها ربط دارد زیرا s_i متغیر حالت i ام را تعریف می‌کنیم مقدار باقی مانده از سمت راست محدودیت i ام.

۱۵- گزینه «۲» صحیح است.

چون هدف آن است که $c^۱x$ بیشتر از آرمان خودش باشد پس مقدار گرفتن $d_۱^+$ هیچ اشکالی ندارد ولی مقدار گرفتن $d_۱^-$ یعنی $c^۱x$ کمتر از $Z_۱$ می‌باشد زیرا $c^۱x + d_۱^- = Z$ خواهد شد.

۱۶- گزینه «۳» صحیح است.

در این حالت $d_۱^-$ و $d_۱^+$ هر دو باید به سمت صفر میل کنند تا $c^۱x = Z_۱$ شود پس $d_۱^-$ و $d_۱^+$ هر دو داخل تابع هدف قرار خواهند گرفت.

۱۷- گزینه «۱» صحیح است.

در مسأله حداکثر جریان هیچ گاه جریان f از ظرفیت برش هیچ کدام از محدودیت‌ها بیشتر نخواهد شد زیرا حداکثر جریان با حداقل برش یکسان می‌باشد.

۱۸- گزینه «۴» صحیح است.

A \ B	۱	۲	۳	min
۱	۳	-۱	-۳	-۳
۲	-۳	۳	-۱	-۳
۳	-۴	-۳	۳	-۴
max	۳	۳	۳	

max

min

$۳ \neq -۳$

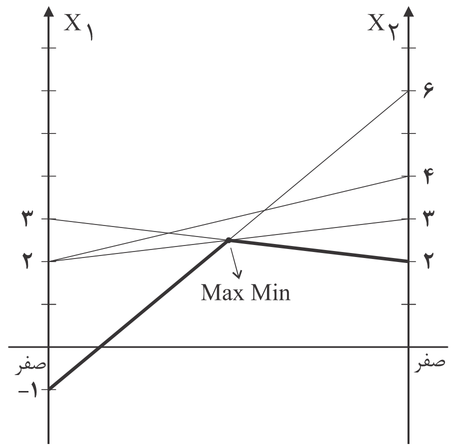
پس مسأله نقطه زینی ندارد.

۱۹- گزینه «۴» صحیح است.

با افزودن یک مقدار ثابت به تمام عناصر ماتریس بازده در یک مسأله بازی‌ها استراتژی بهینه هیچ تغییری نمی‌کند ولی به ارزش بهینه (تابع هدف بهینه) k واحد اضافه می‌شود. به همین ترتیب اگر $k > ۰$ در تابع هدف ضرب شود.

۲۰-گزینه «۳» صحیح است.

شکل مربوط به بازیکن A را رسم می‌کنیم.



$$\begin{cases} -x_1 + 6x_2 = 3x_1 + 2x_2 \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} \\ x_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$$