

الکترومغناطیس

- ۱ - دو حلقه‌ی کوچک به شعاع a و دارای جریان‌های هم‌جهت I به فاصله‌ی d ($a \ll d$) در صفحه‌ی xy مفروض‌اند. اگر فاصله‌ی دو حلقه به $2d$ افزایش یابد کار عامل خارجی چقدر خواهد بود؟

$$\frac{\mu_0 \pi a^4}{16 d^3} \quad (۴) \quad \frac{7 \mu_0 \pi a^4}{96 d^3} \quad (۳) \quad \frac{7 \mu_0 \pi a^4}{64 d^3} \quad (۲) \quad \frac{\mu_0 \pi a^4}{32 d^3} \quad (۱)$$

- ۲ - کره‌ای به شعاع a دارای مغناطیس شدگی یکنواخت $\vec{M}_0 \hat{z}$ می‌باشد. بردار چگالی شار مغناطیسی \vec{B} در داخل کره کدام است؟

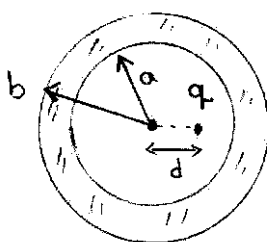
$$\vec{B} = \mu_0 \vec{M}_0 \hat{z} \quad (۱) \quad B = \frac{1}{3} \mu_0 M_0 \hat{z} \quad (۲)$$

$$\vec{B} = -\mu_0 \vec{M}_0 \hat{z} \quad (۴) \quad B = \frac{2}{3} \mu_0 M_0 \hat{z} \quad (۳)$$

- ۳ - کره‌ای به شعاع a و مرکز مبدأ مختصات دارای بار سطحی با چگالی $\rho_s = \cos \theta$ می‌باشد کدام گزینه پتانسیل الکتریکی را داخل کره نشان می‌دهد؟

$$V = \frac{1}{3 \epsilon_0} R \cos \theta \quad (۴) \quad V = R \sin \theta \quad (۳) \quad V = R \cos \theta \quad (۲) \quad \text{صفر} \quad (۱)$$

- ۴ - یک پوسته‌ی کروی رسانا به شعاع داخلی a و شعاع خارجی b مطابق شکل در مبدأ مختصات واقع است. بار نقطه‌ای q به فاصله‌ی d ($a > d$) از مرکز پوسته‌ی کروی واقع است. پتانسیل الکتریکی در مرکز کره کدام است؟



$$\frac{q}{4 \pi \epsilon_0} \left[\frac{1}{b} + \frac{1}{d-a} \right] \quad (۲) \quad \frac{q}{4 \pi \epsilon_0} \left[\frac{1}{d} + \frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right] \quad (۱)$$

$$\frac{q}{4 \pi \epsilon_0} \left[\frac{a+b-d}{a(b-d)} \right] \quad (۴) \quad \frac{q}{4 \pi \epsilon_0} \left[\frac{b+(d-a)}{b(d-a)} \right] \quad (۳)$$

- ۵ - کره‌ای به شعاع a دارای بار حجمی با چگالی $\rho = \rho_0 R^2$ می‌باشد نسبت انرژی ذخیره شده در خارج کره به انرژی ذخیره شده در داخل کره کدام است؟

$$۱۱ \quad (۴) \quad ۹ \quad (۳) \quad ۷ \quad (۲) \quad ۵ \quad (۱)$$

- ۶ - حلقه‌ای به شعاع a و دارای جریان I به مرکز مبدأ مختصات و در صفحه‌ی xy مفروض است. بار الکتریکی q با سرعت ثابت $\vec{V} = V_0 \hat{x}$ بر روی محور x ها در حرکت است نیروی وارد بر بار هنگامی که در نقطه‌ی $(x = d, 0, 0)$ می‌باشد، کدام است؟ ($d \gg a$)

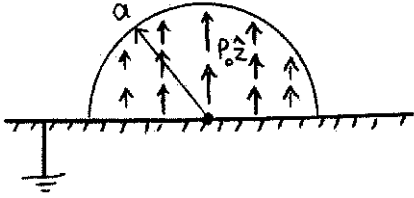
$$\frac{\mu_0 q V_0 a^2 I}{4 \pi d^3} \hat{y} \quad (۲) \quad \frac{\mu_0 q V_0 a^2 I}{4 d^3} \hat{y} \quad (۱)$$

$$\frac{\mu_0 q V_0 a^2 I}{8 \pi d^3} \hat{y} \quad (۴) \quad \text{صفر} \quad (۳)$$

۷ - کره‌ای به شعاع a دارای قطبی شدگی یکنواخت $\vec{P} = P_0 \hat{z}$ می‌باشد انرژی الکتریکی خارج کره کدام است؟

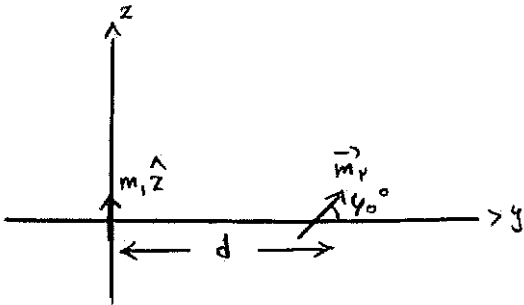
(۱) صفر (۲) $\frac{4\pi P_0^2 a^3}{9\epsilon_0}$ (۳) $\frac{4\pi P_0^2 a^3}{12\epsilon_0}$ (۴) $\frac{4\pi P_0^2 a^3}{27\epsilon_0}$

۸ - نیم کره‌ای به شعاع a به صورت $P_0 \hat{z}$ قطبیده شده است و مطابق شکل زیر بر روی صفحه‌ای رسانا با پتانسیل صفر ولت قرار داده شده است. شدت میدان الکتریکی در مرکز کره کدام است؟



(۱) صفر (۲) $-P_0 \hat{z}$ (۳) $-\frac{P_0}{2\epsilon_0} \hat{z}$ (۴) $-\frac{P_0}{3\epsilon_0} \hat{z}$

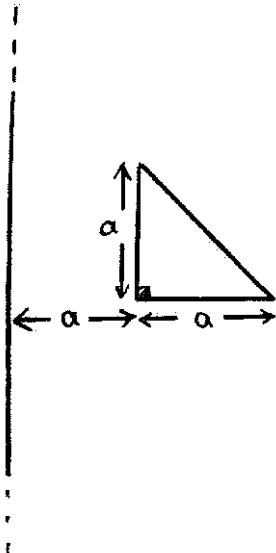
۹ - دو قطبی میکروسکوپی مغناطیسی $m_1 \hat{z}$ در مبدأ مختصات مفروض است. می‌خواهیم دوقطبی میکروسکوپی \vec{m}_2 را مطابق شکل زیر به فاصله‌ی d از مبدأ قرار دهیم کار انجام شده کدام است؟



(۱) $\frac{\mu_0 |m_1| |m_2|}{4\pi d^3}$ (۲) $\frac{\sqrt{3} \mu_0 |m_1| |m_2|}{4\pi d^3}$

(۳) $\frac{3\mu_0 |m_1| |m_2|}{4\pi d^3}$ (۴) $\frac{\sqrt{3} \mu_0 |m_1| |m_2|}{4\pi d^3}$

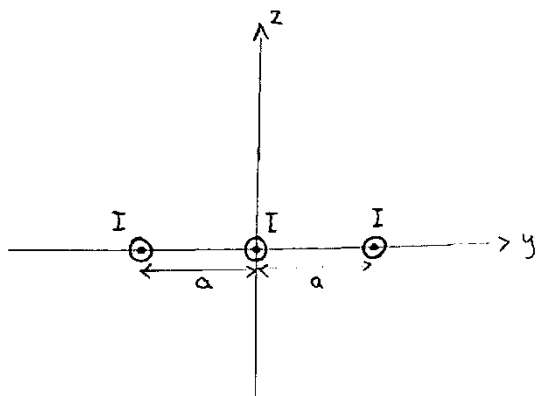
۱۰ - در شکل زیر اندوکتانس متقابل سیم نامحدود و حلقه مثلثی کدام است؟



(۱) $\frac{\mu_0 a}{2\pi} (\ln(2) - 1)$ (۲) $\frac{\mu_0 a}{2\pi} (2\ln(2) - 1)$

(۳) $\frac{\mu_0 a}{2\pi} (\ln(2) + 1)$ (۴) $\frac{\mu_0 a}{4\pi} (\ln(2) + 1)$

- ۱۱ - سه سیم نامحدود با طول ℓ جریان‌های یکسان I مطابق شکل زیر به صورت موازی با هم قرار دارند سیم وسطی را در راستای محور z ها کمی جابه‌جا کرده و رها می‌کنیم. پریود نوسانات این سیم کدام است؟ (جرم سیم وسطی m است)



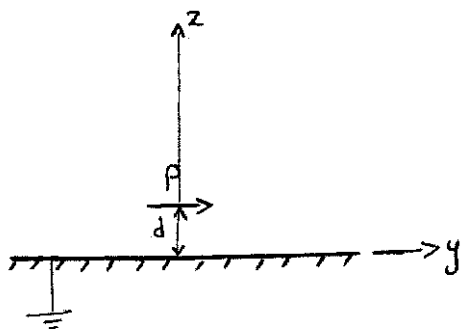
$$\frac{\pi a}{I} \sqrt{\frac{2m\pi}{\mu_0}} \quad (2)$$

$$\frac{2\pi a}{I} \sqrt{\frac{2m\pi}{\mu_0}} \quad (1)$$

$$\frac{\pi a}{I} \sqrt{\frac{m\pi}{\mu_0 \ell}} \quad (4)$$

$$\frac{2\pi a}{I} \sqrt{\frac{m\pi}{\mu_0}} \quad (3)$$

- ۱۲ - دو قطبی الکتریکی میکروسکوپی \vec{P} مطابق شکل زیر به صورت افقی در نقطه‌ی $z = d$ قرار داده شده است. شدت میدان الکتریکی در نقطه‌ی $(0, 0, z = 2d)$ کدام است؟



$$\frac{19 |P|}{864 \pi \epsilon_0 d^3} (-\hat{y}) \quad (2)$$

$$\frac{|P|}{32 \pi \epsilon_0 d^3} (-\hat{y}) \quad (1)$$

$$\frac{7 |P|}{27 \pi \epsilon_0 d^3} (-\hat{y}) \quad (4)$$

$$\frac{13 |P|}{54 \pi \epsilon_0 d^3} (-\hat{y}) \quad (3)$$

الکترومغناطیس

۱- گزینه «۳» صحیح است.

چون نیرو بین دو قطبی‌های این مسئله جاذبه می‌باشد کار انجام شده مثبت خواهد بود و اندازه‌ی آن برابر است با:

$$W = \Delta W = \int_d^{\infty} \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = \int_d^{\infty} \frac{\mu_0 m_1 m_2}{4\pi \ell^3} d\ell = \frac{\mu_0 m_1 m_2}{4\pi} \left[\frac{-1}{2\ell^2} \right]_d^{\infty} = \frac{\mu_0 m_1 m_2}{8\pi d^2}$$

$$m_2 = m_1 = \pi a^2 I$$

$$W = \frac{\mu_0 \pi a^4 I^2}{8 d^2}$$

۲- گزینه «۳» صحیح است.

۳- گزینه «۴» صحیح است.

$$V(R, \theta) = \sum \left[A_n R^n + \frac{B_n}{R^{n+1}} \right] P_n(\cos \theta) \Rightarrow \begin{cases} V_{in} = \sum A_n R^n P_n(\cos \theta) \\ V_{out} = \sum \frac{B_n}{R^{n+1}} P_n(\cos \theta) \end{cases}$$

واضح است که به خاطر شرایط اولیه‌ی $P_0 = \cos \theta$ بایستی $n=1$ باشد

$$\begin{cases} V_{in} = A_1 R \cos \theta \\ V_{out} = \frac{B_1}{R^2} \cos \theta \end{cases}$$

$$R=a \Rightarrow V_{in} = V_{out} \Rightarrow A_1 a = \frac{B_1}{a^2} \Rightarrow B_1 = a^3 A_1$$

$$(D_{out})_n - (D_{in})_n = P_s \Rightarrow \left. \frac{\partial V_{out}}{\partial R} \right|_{R=a} - \left. \frac{\partial V_{in}}{\partial R} \right|_{R=a} = -\frac{1}{\epsilon_0} P_s$$

$$A_1 \cos \theta + a^3 A_1 \left(\frac{2}{a^3} \right) \cos \theta = \frac{1}{\epsilon_0} \cos \theta \Rightarrow A_1 = \frac{1}{3\epsilon_0}$$

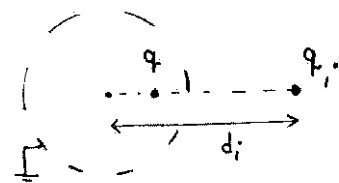
$$V_{in} = \frac{1}{3\epsilon_0} R \cos \theta$$

$$V_{out} = \frac{a^3}{3\epsilon_0 R^2} \cos \theta \rightarrow \begin{cases} \vec{E}_{in} = -\nabla V_{in} \\ \vec{E}_{out} = -\nabla V_{out} \end{cases}$$

۴- گزینه «۱» صحیح است.

$$R=b \text{ پتانسیل روی کره در } V_0 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 b}$$

$$R=b \text{ پتانسیل در مرکز کره با مرجع } V' = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 d} + \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 d_i}$$



$$q_i = -\frac{a}{d}q, \quad d_i = \frac{a^2}{d}$$

$$\Rightarrow V' = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{d} + \frac{-\frac{a}{d}}{\frac{a^2}{d}} \right] = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{d} - \frac{1}{a} \right] = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 d} + \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 a}$$

$$\infty \quad V = V_0 + V' = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{b} + \frac{1}{d} - \frac{1}{a} \right]$$

توجه: نتیجه فوق را از روی بار القایی روی رسانا نیز می‌توان به دست آورد.

۵- گزینه «۳» صحیح است.

$$P = P_0 R^n$$

$$n = 2 \Rightarrow \frac{W_{out}}{W_{in}} = 2n + 5 = 9$$

۶- گزینه «۱» صحیح است.

$$\vec{F} = q(\vec{V} \times \vec{B})$$

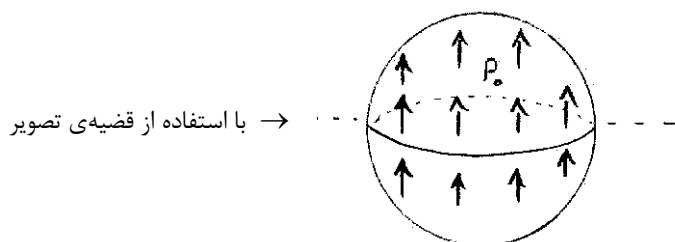
$$\vec{B} = \frac{\mu_0 |m|}{4\pi d^3} (-\hat{z}) = \frac{\mu_0 (\pi a^3) I}{4\pi d^3} (-\hat{z}) = \frac{\mu_0 a^3 I}{4d^3} (-\hat{z})$$

$$\vec{F} = q \left[V_0 \hat{x} \times (-\hat{z}) \frac{\mu_0 a^3 I}{4d^3} \right] = \frac{\mu_0 q V_0 a^3 I}{4d^3} \hat{y}$$

۷- گزینه «۴» صحیح است.

$$\vec{P} = P_0 \left(\frac{4\pi}{3} a^3 \right) \hat{z}$$

$$W = \frac{|P^z|}{12\pi\epsilon_0 a^3} = \frac{P_0^z \left(\frac{4\pi}{3} \right) a^3}{12\pi\epsilon_0} = \frac{P_0^z (4\pi) a^3}{24\epsilon_0}$$



۸- گزینه «۴» صحیح است.

$$P_0 \hat{z} \quad \vec{E} = \frac{-P_0}{3\epsilon_0} \hat{z}$$

۹- گزینه «۲» صحیح است.

$$V = \frac{\mu_0}{4\pi d^3} [\vec{m}_1 \cdot \vec{m}_2 - 3(\vec{m}_1 \cdot \hat{y})(\vec{m}_2 \cdot \hat{y})] = \frac{\mu_0 |\vec{m}_1| |\vec{m}_2| \cos \theta}{4\pi d^3} = \frac{\sqrt{3} \mu_0 m_1 m_2}{4\pi d^3}$$

۱۰- گزینه «۲» صحیح است.

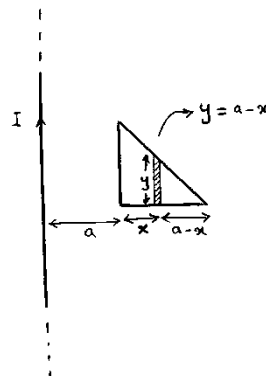
$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi(a+x)}$$

$$d\phi = B ds = B y dx$$

$$\phi_{12} = \int d\phi = \int \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{a-x}{a+x} dx$$

$$L_{12} = \frac{\phi_{12}}{I} = \frac{\mu_0}{2\pi} \int_0^a \frac{a-(x+a)}{x+a} dx = \frac{\mu_0}{2\pi} [2a \ln(x+a) - x]_0^a$$

$$= \frac{\mu_0 a}{2\pi} (2 \ln(2) - 1)$$

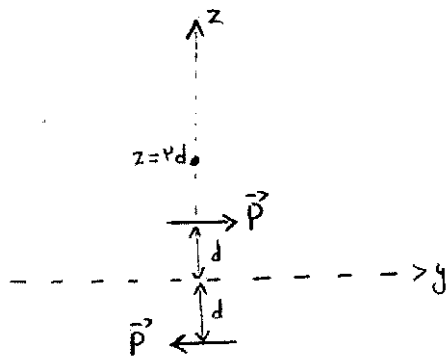


۱۱- گزینه «۳» صحیح است.

$$F_{T_0} = \tau |F| = \tau \frac{\mu_0 I^2}{2\pi a} \ell = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi a} \ell$$

$$\omega = \sqrt{\frac{F_{T_0}}{ma}} \Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{ma}{F_{T_0}}} = 2\pi \sqrt{\frac{m \pi a^2}{\mu_0 I^2 \ell}} = \frac{2\pi a}{I} \sqrt{\frac{m \pi}{\mu_0 \ell}}$$

۱۲- گزینه «۳» صحیح است.



$$\vec{E} = \frac{|P|}{4\pi\epsilon_0 (1d)^2} (-\hat{y}) + \frac{|P|}{4\pi\epsilon_0 (3d)^2} (+\hat{y}) = \frac{|P|}{4\pi\epsilon_0 d^2} \left(-1 + \frac{1}{9}\right) \hat{y} = \frac{-8|P|}{36\pi\epsilon_0 d^2} \hat{y}$$