

الکترومغناطیس

- ۱ - حلقه‌ای دایروی به شعاع a و دارای جریان I_1 و به مرکز مبدأ مختصات که در صفحه‌ی xoy قرار گرفته است. به حلقه‌ی دیگری به شعاع b و دارای جریان I_2 در صفحه‌ی xoy که مرکز آن در نقطه‌ی $(x, y, z) = (d, d, 0)$ قرار دارد، چه نیرویی وارد می‌کند؟ ($a, b \ll d$)

$$\frac{3\mu_0 \pi I_1 I_2 a^2 b^2}{16 d^4} \quad (2) \quad \frac{3\mu_0 \pi I_1 I_2 a^2 b^2}{8 d^4} \quad (1)$$

$$\frac{3\mu_0 I_1 I_2 a^2 b^2}{16 d^4} \quad (4) \quad \frac{3\mu_0 I_1 I_2 a^2 b^2}{8 d^4} \quad (3)$$

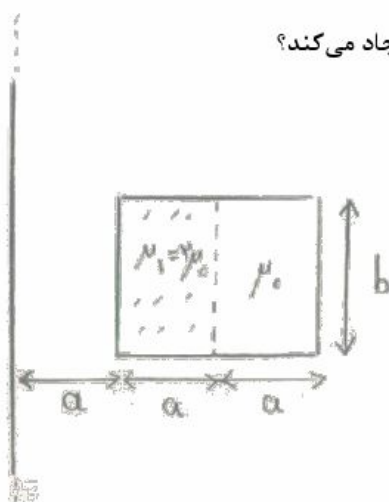
- ۲ - مرکز آهنربایی استوانه‌ای به ارتفاع h و شعاع مقطع a با مغناطیس‌شدگی یکنواخت $M_0 \hat{z}$ در مبدأ مختصات قرار دارد. شار

مغناطیس عبوری از نیم کره‌ی $R = b$ و $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ کدام است؟

$$\frac{\mu_0 M_0 \pi a^2 h}{b} \quad (2) \quad \frac{\mu_0 M_0 \pi a^2 h}{2b} \quad (1)$$

$$\frac{\mu_0 M_0 a^2 h}{b} \quad (4) \quad \frac{\mu_0 M_0 a^2 h}{2b} \quad (3)$$

- ۳ - در شکل زیر سیم نامحدود در مجاورت حلقه سیم مستطیل شکل چه اندوکتانس متقابل ایجاد می‌کند؟



$$\frac{\mu_0 b}{2\pi} \ln(2) \quad (1)$$

$$\frac{\mu_0 b}{2\pi} \ln(3) \quad (2)$$

$$\frac{\mu_0 b}{2\pi} \ln\left(\frac{3}{2}\right) \quad (3)$$

$$\frac{\mu_0 b}{2\pi} \ln(6) \quad (4)$$

- ۴ - اندوکتانس در واحد طول متقابل بین دو سیملوله هم محور به شعاع‌های a و $2a$ و هر یک دارای n دور سیم در واحد طول. کدام است؟

$$\frac{1}{2} \mu_0 n^2 \pi a^2 \quad (4) \quad \mu_0 n^2 \pi a^2 \quad (3) \quad 2 \mu_0 n^2 \pi a^2 \quad (2) \quad 4 \mu_0 n^2 \pi a^2 \quad (1)$$

- ۵ - در سطح کره‌ای به شعاع a جریان سطحی $\vec{K} = K_0 \sin \theta \hat{\phi}$ برقرار شده است. انرژی مغناطیسی ذخیره شده در خارج کره کدام است؟

$$\frac{\pi \mu_0 K_0^2 a^3}{27} \quad (2) \quad \frac{4\pi \mu_0 K_0^2 a^3}{27} \quad (1)$$

$$\frac{\pi \mu_0 K_0^2 a^3}{9} \quad (4) \quad \frac{\pi \mu_0 K_0^2 a^3}{12} \quad (3)$$

۶ - کره‌ای به شعاع a به صورت $M_0 \hat{z}$ مغناطیس شده است. انرژی مغناطیسی داخل کره کدام است؟

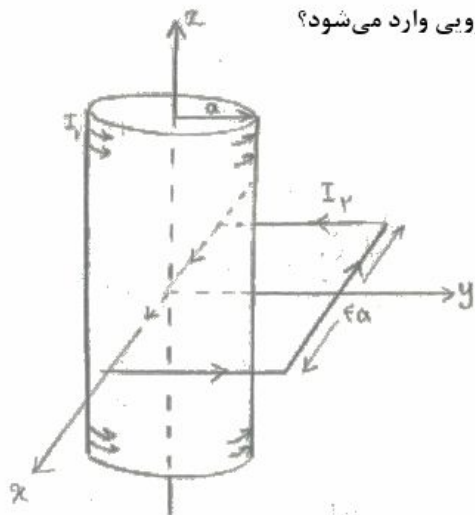
$$\frac{4\pi\mu_0 M_0^2 a^3}{27} \quad (2)$$

$$\frac{8\pi\mu_0 M_0^2 a^3}{27} \quad (1)$$

$$\frac{\pi\mu_0 M_0^2 a^3}{27} \quad (4)$$

$$\frac{16\pi\mu_0 M_0^2 a^3}{27} \quad (3)$$

۷ - سیم‌لوله‌ای طویل به شعاع a دارای n دور سیم به هم فشرده در واحد طول می‌باشد که در آن جریان I_1 برقرار شده است اگر محور سیم‌لوله در راستای محور z ها باشد، بر حلقه‌ی مربعی شکل زیر به ضلع $4a$ چه نیرویی وارد می‌شود؟



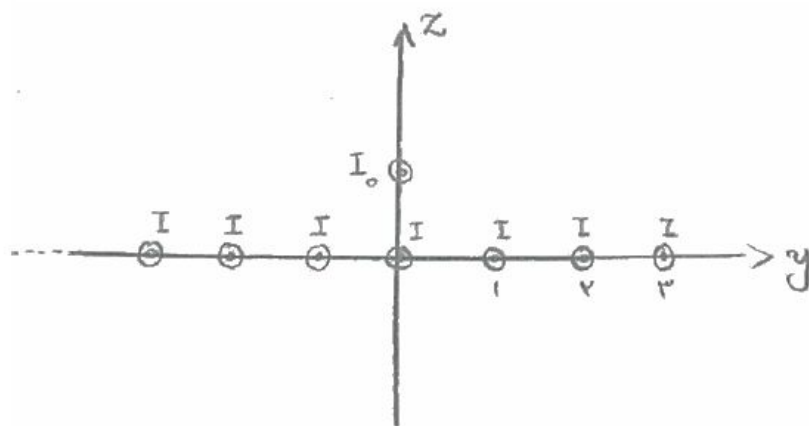
$$4a\mu_0 n I_1 I_2 \vec{a}_y \quad (1)$$

$$2a\mu_0 n I_1 I_2 \vec{a}_y \quad (2)$$

$$-4a\mu_0 n I_1 I_2 \vec{a}_y \quad (3)$$

$$-2a\mu_0 n I_1 I_2 \vec{a}_y \quad (4)$$

۸ - تعداد نامحدودی سیم با طول نامحدود با جریان یکسو I به صورت موازی روی محور y ها در نقاط $y = n$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) به یک سیم نامحدود دیگر در صفحه‌ی xoz به موازات محور x ها و در $z = 1$ با جریان I_0 در جهت x ها، چه نیرویی وارد می‌کنند؟



$$\frac{\mu_0 I I_0}{2\pi} \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n^2 + 1} \right] \right] \quad (1)$$

$$\frac{\mu_0 I I_0}{2\pi} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n^2 + 1} \right] \right] \quad (2)$$

$$\frac{\mu_0 I I_0}{\pi} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n^2 + 1} \right] \right] \quad (3)$$

$$\frac{\mu_0 I I_0}{\pi} \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n^2 + 1} \right] \right] \quad (4)$$

۹ - کابل هم محوری به شعاع داخلی a و شعاع خارجی b و طول زیاد دارای چه اندوکتانس خودی در واحد طول می‌باشد؟

$$\frac{\mu_0}{4\pi} \left[1 - \frac{2a^2}{(b^2 - a^2)} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \right] \quad (2)$$

$$\frac{\mu_0}{4\pi} \left[1 + \frac{a^2}{(b^2 - a^2)} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \right] \quad (1)$$

$$\frac{\mu_0}{4\pi} \left[1 - \frac{a^2}{(b^2 - a^2)} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \right] \quad (4)$$

$$\frac{\mu_0}{16\pi} \left[1 + \frac{a^2}{(b^2 - a^2)} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \right] \quad (3)$$

۱۰ - استوانه‌ای طویل به شعاع داخلی a و شعاع خارجی b به صورت $\vec{p} = \frac{2}{r} \vec{a}_r$ [در مختصات استوانه‌ای] قطبیده شده است. این

استوانه را حول محورش [zها] با سرعت زاویه‌ای ω دوران می‌دهیم. انرژی مغناطیسی در واحد طول استوانه کدام است؟

$$(1) \quad 4\mu_0 \pi \omega^2 (b^2 - a^2) \quad (2) \quad \frac{1}{4} \mu_0 \pi \omega^2 (b^2 - a^2)$$

$$(3) \quad 2\mu_0 \pi \omega^2 (b^2 - a^2) \quad (4) \quad \frac{1}{8} \mu_0 \pi \omega^2 (b^2 - a^2)$$

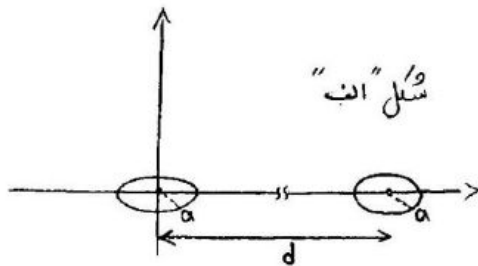
۱۱ - در ناحیه‌ای از فضا بردار پتانسیل مغناطیسی به صورت $\vec{A} = A_0 \cos(\omega t) \hat{\phi}$ مفروض است. شدت میدان الکتریکی چرخان

در این ناحیه لحظه‌ی $t = \frac{\pi}{6\omega}$ کدام است؟

$$(1) \quad \frac{1}{2} A_0 \omega \hat{\phi} \quad (2) \quad \frac{-1}{2} A_0 \omega \hat{\phi} \quad (3) \quad \frac{\sqrt{3}}{2} A_0 \hat{\phi} \quad (4) \quad \frac{-\sqrt{3}}{2} A_0 \hat{\phi}$$

۱۲ - دو حلقه دایره‌ای به شعاع a یک بار به صورت شکل «الف» به صورت هم صفحه در کنار یکدیگر و در فاصله‌ی d ($a \ll d$) از

هم قرار می‌گیرند و بار دیگر مطابق شکل «ب» به صورت موازی و هم محور در فاصله‌ی $2d$ از هم قرار می‌گیرند نسبت اندوکتانس متقابل در حالت «ب» چند برابر اندوکتانس حالت «الف» می‌باشد؟

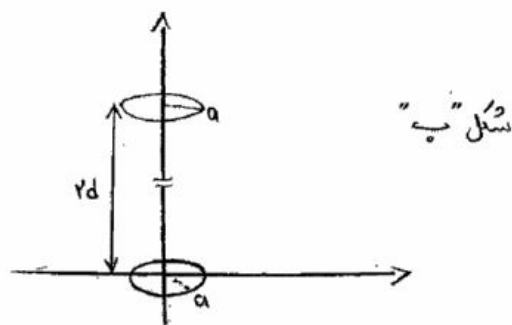


(1) 2

(2) 4

(3) $\frac{1}{2}$

(4) $\frac{1}{4}$



الکترومغناطیس

۱- گزینه «۲» صحیح است.

$$\left. \begin{aligned} |F| &= \frac{\gamma \mu_o m_1 m_2}{4\pi (\sqrt{\epsilon} d)^\epsilon} \\ m_1 &= I_1 (\pi a^\gamma) \\ m_2 &= I_2 (\pi b^\gamma) \end{aligned} \right\} \Rightarrow F = \frac{\gamma \mu_o \pi I_1 I_2 a^\gamma b^\gamma}{4\epsilon d^\epsilon}$$

۲- گزینه «۱» صحیح است.

$$\begin{aligned} \vec{m} &= \int \vec{M} dv = M_o (\pi a^\gamma) h \hat{z} \\ (R=b), : \vec{B} &= \frac{\mu_o |\vec{m}|}{4\pi b^\gamma} [\gamma \cos \theta \vec{a}_R + \sin \theta \vec{a}_\theta] \\ \phi_m &= \int \vec{B} \cdot d\vec{S}_R = \int \frac{\mu_o |\vec{m}|}{4\pi b^\gamma} (\gamma \cos \theta \vec{a}_R + \sin \theta \vec{a}_\theta) \cdot \vec{a}_R b^\gamma \sin \theta d\theta d\phi \\ &= \frac{\mu_o |\vec{m}|}{4\pi b} \int \gamma \cos \theta \sin \theta d\theta d\phi = \frac{\mu_o |m|}{2b} \left[\sin^\gamma \theta \right]_0^\pi = \frac{\mu_o |m|}{2b} = \frac{\mu_o M_o \pi a^\gamma h}{2b} \end{aligned}$$

۳- گزینه «۴» صحیح است.

$$\begin{aligned} H_{1q} &= H_{2q} \Rightarrow H = \frac{I}{2\pi r} \vec{a}_\phi \\ B_1 &= \frac{\mu_1 I}{2\pi r}, \quad B_2 = \frac{\mu_2 I}{2\pi r} \\ \phi_1 &= \int_{S_1} \vec{B}_1 \cdot d\vec{S} = \int \frac{\gamma \mu_o I}{2\pi r} (b dr) = \frac{\gamma \mu_o I b}{2\pi} \ln r \Big|_a^{\gamma a} = \frac{\mu_o I b}{2\pi} \ln \epsilon \\ \phi_2 &= \int_{S_2} \vec{B}_2 \cdot d\vec{S} = \int \frac{\mu_o I}{2\pi r} b dr = \frac{\mu_o I b}{2\pi} \ln r \Big|_a^{\gamma a} = \frac{\mu_o I b}{2\pi} \ln \left[\frac{\gamma}{2} \right] \\ \phi_T &= \frac{\mu_o I b}{2\pi} \ln \left[\epsilon \times \frac{\gamma}{2} \right] = \frac{\mu_o I b}{2\pi} \ln(\epsilon) \\ M &= \frac{\phi}{I} = \frac{\mu_o b}{2\pi} \ln(\epsilon) \end{aligned}$$

۴- گزینه «۳» صحیح است.

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \mu_o n I \quad \text{عبوری از فصل مشترک} \\ \phi_{12} &= |B| (\pi a^\gamma) = (\mu_o n I) \pi a^\gamma \quad \text{شار عبوری از فصل مشترک} \\ L_{12} &= \frac{N_1 \phi_{12}}{I} = \frac{(n\ell) (\mu_o n I \pi a^\gamma)}{I} \\ \frac{L_{12}}{\ell} &= \mu_o n^\gamma \pi a^\gamma \end{aligned}$$

۵- گزینه «۱» صحیح است.

$$\begin{aligned}
 K_o \sim M_o &\Rightarrow \vec{m} \cancel{M_o} \left(\frac{\sqrt[3]{\pi}}{r} a^r \right) \hat{z} = K_o \left(\frac{\sqrt[3]{\pi}}{r} a^r \right) \hat{z} \\
 \vec{B} &= \frac{\mu_o |\vec{m}|}{\sqrt[3]{\pi} R^r} (r \cos \theta \vec{a}_R + \sin \theta \vec{a}_\theta) \\
 W_m &= \frac{1}{\sqrt[3]{\mu_o}} |B|^r = \frac{\mu_o |m|^r}{\sqrt[3]{\pi} R^r} (r \cos^r \theta + \sin^r \theta) = \frac{\mu_o |m|^r}{\sqrt[3]{\pi} R^r} (r \cos^r \theta + 1) \\
 W &= \int W_m dV = \int \frac{\mu_o |m|^r}{\sqrt[3]{\pi} R^r} (r \cos^r \theta + 1) R^r \sin \theta dR d\theta d\phi \\
 &= \frac{\mu_o |m|^r}{\sqrt[3]{\pi}} (\sqrt[3]{\pi}) \int \frac{1}{R^r} (r \cos^r \theta \sin \theta + \sin \theta) dR d\theta \\
 &= \frac{\mu_o |m|^r}{\sqrt[3]{\pi}} \left[\frac{-1}{\sqrt[3]{\pi} R^r} \right]_a^\infty (-\cos^r \theta - \cos \theta) = \frac{\mu_o |m|^r}{\sqrt[3]{\pi} a^r} \\
 &= \frac{\mu_o K_o^r (\sqrt[3]{\pi})^r a^r}{9 \times \sqrt[3]{\pi} a^r} = \frac{\sqrt[3]{\pi} \mu_o K_o^r a^r}{\sqrt[3]{\pi}}
 \end{aligned}$$

۶- گزینه «۱» صحیح است.

$$\begin{aligned}
 \vec{J}_m &= \vec{\nabla} \times \vec{M} = 0 \\
 \vec{J}_{ms} &= \vec{M} \times \vec{a}_n = M_o \vec{a}_z \times \vec{a}_R = M_o \sin \theta \vec{a}_\phi \\
 \vec{B} &= \int \frac{\mu_o \vec{J}_{ms} dS \times \vec{R}}{\sqrt[3]{\pi} |\vec{R}|^r} = \int \frac{\mu_o M_o \sin \theta a^r \sin \theta d\theta d\phi \vec{a}_\phi \times (-a \vec{a}_R)}{\sqrt[3]{\pi} a^r} \\
 &= \frac{\mu_o M_o}{\sqrt[3]{\pi}} \int \sin^r \theta (-\vec{a}_\theta) d\theta d\phi \\
 &= \frac{\mu_o M_o}{\sqrt[3]{\pi}} \int -\sin^r \theta \left(\cos \theta \vec{a}_r - \sin \theta \vec{a}_z \right) d\theta d\phi = \frac{\mu_o M_o}{\sqrt[3]{\pi}} \sqrt[3]{\pi} \int_0^\pi \sin^r \theta d\theta \vec{a}_z = \frac{\sqrt[3]{\pi} \mu_o M_o}{\sqrt[3]{\pi}} \vec{a}_z
 \end{aligned}$$

نکته: بدانید که B در داخل چنین کره‌ای در همه جا یکسان و برابر با مرکز کره است.

$$\begin{aligned}
 W_m &= \frac{1}{\sqrt[3]{\mu_o}} \frac{\sqrt[3]{\pi} \mu_o^r M_o^r}{9} = \frac{\sqrt[3]{\pi} \mu_o^r M_o^r}{9} \\
 W &= \int W_m dV = \left(\frac{\sqrt[3]{\pi} \mu_o^r M_o^r}{9} \right) \frac{\sqrt[3]{\pi}}{r} a^r = \frac{\sqrt[3]{\pi} \mu_o^r M_o^r a^r}{\sqrt[3]{\pi}}
 \end{aligned}$$

۷- گزینه «۴» صحیح است.

$$\begin{aligned}
 \vec{B}_{in} &= \sqrt[3]{\pi} \mu_o n I_1 \vec{a}_z \\
 \vec{B}_{out} &= 0 \\
 F &= I_r \ell \times B_{in} = I_r (\sqrt[3]{\pi} a) B_{in} = -\mu_o n I_1 I_r (\sqrt[3]{\pi} a) \vec{a}_y
 \end{aligned}$$

۸- گزینه «۱» صحیح است.

$$F_{nT} = \frac{\mu_o I I_o}{r\pi} \cos \alpha = \frac{\mu_o I I_o}{r\pi} \frac{1}{r^{\gamma}} = \frac{\mu_o I I_o}{\pi} \frac{1}{n^{\gamma} + 1}$$

$$F_T = F_o + \sum_{n=1}^{\infty} F_{nT} = \frac{\mu_o I I_o}{\pi} + \frac{\mu_o I I_o}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\gamma} + 1}$$

۹- گزینه «۲» صحیح است.

$$B(r) = \frac{\mu_o I_{in}}{r\pi} = \frac{\mu_o}{r\pi} \frac{\left(\frac{r^{\gamma} - a^{\gamma}}{b^{\gamma} - a^{\gamma}} \right) I}{r} = \frac{\mu_o I}{r\pi(b^{\gamma} - a^{\gamma})} \left[r - \frac{a^{\gamma}}{r} \right]$$

$$\Phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{S}_{\Phi} = \int \frac{\mu_o I}{r\pi(b^{\gamma} - a^{\gamma})} \left(r - \frac{a^{\gamma}}{r} \right) dr dz$$

$$= \frac{\mu_o I \ell}{r\pi(b^{\gamma} - a^{\gamma})} \left[\frac{r^{\gamma}}{\gamma} - a^{\gamma} \ln r \right]_a^b = \frac{\mu_o I \ell}{r\pi(b^{\gamma} - a^{\gamma})} \left[(b^{\gamma} - a^{\gamma}) - \gamma a^{\gamma} \ln \left(\frac{b}{a} \right) \right]$$

$$\frac{L_{11}}{\ell} = \frac{\Phi}{I \ell} = \frac{\mu_o}{r\pi(b^{\gamma} - a^{\gamma})} \left[b^{\gamma} - a^{\gamma} - \gamma a^{\gamma} \ln \left(\frac{b}{a} \right) \right]$$

۱۰- گزینه «۳» صحیح است.

$$\rho_b = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = \frac{-1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\gamma}{r} \right] = 0$$

$$r = a \quad \rho_{sb}^- = \vec{P} \cdot \vec{a}_n = \frac{\gamma}{a} \vec{a}_r \cdot (-\vec{a}_r) = \frac{-\gamma}{a} \rightarrow \vec{J}_s^- = \rho_{sb}^- r \omega \vec{a}_{\phi} |_{r=a} = \frac{-\gamma}{a} a \omega \vec{a}_{\phi} = -\gamma \omega \vec{a}_{\phi}$$

$$r = b \quad \rho_{sb}^+ = \vec{P} \cdot \vec{a}_n = \frac{\gamma}{b} \vec{a}_r \cdot (+\vec{a}_r) = \frac{\gamma}{b} \rightarrow \vec{J}_s^+ (r=b) = +\gamma \omega \vec{a}_{\phi}$$

$$B(r < a) = B^- + B^+ = \mu_o |J_s^-| \vec{a}_z + \mu_o |I_s^+| \vec{a}_z = 0$$

$$B(a < r < b) = B^+ = \mu_o |I_s| \vec{a}_z = \gamma \mu_o \omega \vec{a}_z$$

$$B(r > b) = 0$$

$$w_m = \frac{1}{\gamma \mu_o} |B|^{\gamma} = \gamma \mu_o \omega^{\gamma}$$

$$W_T = \int \omega_m dV = (\gamma \mu_o \omega^{\gamma}) \left(\pi (b^{\gamma} - a^{\gamma}) \right) \ell \Rightarrow \frac{W_T}{\ell} = \gamma \mu_o \pi \omega^{\gamma} (b^{\gamma} - a^{\gamma})$$

۱۱- گزینه «۱» صحیح است.

$$\left. \begin{aligned} \nabla \times E &= -\frac{\partial B}{\partial t} \\ B &= \nabla \times A \end{aligned} \right\} \Rightarrow \nabla \times E = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times A) = \nabla \times \left(-\frac{\partial A}{\partial t} \right)$$

$$E = -\frac{\partial A}{\partial t} = A_o \omega \sin(\omega t) \hat{\phi} \bigg|_{t=\frac{\pi}{\omega}} \Rightarrow \vec{E} = \frac{1}{\gamma} A_o \omega \hat{\phi}$$

$$L_{\text{۱۲}} \times \varphi_{\text{۱۲}} \times B_{\text{۱۲}} \Rightarrow \frac{(L_{\text{۱۲}})_B}{(L_{\text{۱۲}})_A} = \frac{(B_{\text{۱۲}})_B}{(B_{\text{۱۲}})_A} = \frac{1}{4}$$

$$(B_{\text{۱۲}})_B = \frac{\mu_o |m|}{4\pi(rd)^r} [r\hat{a}_z]$$

$$(B_{\text{۱۲}})_A = \frac{\mu_o |m|}{4\pi(d)^r} [-\hat{a}_z]$$