

الکترومغناطیس

۱- در مختصات کروی بار الکتریکی با چگالی حجمی $\rho = 2r(1 + \cos\theta)\sin^2\phi$ توزیع شده است. کل بار موجود درون کره ای به شعاع ۲ متر و به مرکز مبدا مختصات چند کولن است؟

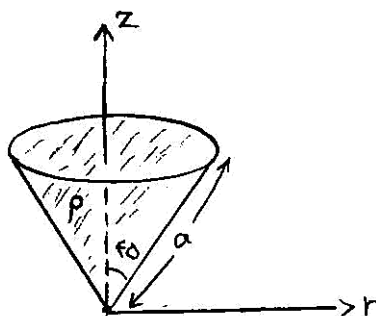
$$32\pi \text{ (۴)}$$

$$32\pi \text{ (۳)}$$

$$16\pi \text{ (۲)}$$

$$8\pi \text{ (۱)}$$

۲- مخروط شکل زیر دارای چگالی بار حجمی ρ می باشد. شدت میدان الکتریکی در راس مخروط کدام است؟



$$\frac{\rho a}{4\epsilon_0} (2 - \sqrt{2}) \text{ (۱)}$$

$$\frac{\rho a}{4\epsilon_0} (\sqrt{2} - 1) \text{ (۲)}$$

$$\frac{\rho a}{4\epsilon_0} (2\sqrt{2} - 1) \text{ (۳)}$$

$$\frac{\rho a}{4\epsilon_0} (1 - \frac{\sqrt{2}}{2}) \text{ (۴)}$$

۳- کره ای دارای بار الکتریکی کل q است که به طور یکنواخت در حجم آن توزیع شده است. شار گذرنده از یک وجه مکعب فرضی که درون این کره محاط است، چند کولن است؟

$$\frac{q}{3\sqrt{3}\pi} \text{ (۴)}$$

$$\frac{q}{6\pi} \text{ (۳)}$$

$$\frac{q}{3\pi} \text{ (۲)}$$

$$\frac{q}{6\sqrt{3}\pi} \text{ (۱)}$$

۴- در ناحیه استوانه ای $0 \leq r \leq a$, $0 \leq \phi \leq 2\pi$, $|z| \leq a$ دو قطبی های میکروسکوپی با بردار گشتاور $p_0 \hat{z}$ و چگالی n در واحد حجم مفروض اند. شدت میدان الکتریکی در مبدا مختصات کدام است؟

$$\frac{np_0}{\epsilon_0} (1 - \frac{\sqrt{3}}{2}) \text{ (۴)}$$

$$\frac{np_0}{2\epsilon_0} (2 - \sqrt{2}) \text{ (۳)}$$

$$\frac{np_0}{\epsilon_0} (2 - \frac{\sqrt{2}}{2}) \text{ (۲)}$$

$$\frac{np_0}{\epsilon_0} (2 - \sqrt{2}) \text{ (۱)}$$

۵- استوانه $0 \leq r \leq a$, $0 \leq \phi \leq 2\pi$, $|z| \leq h$ دارای قطبی شدگی $\vec{P} = P_0 \hat{z}$ می باشد. اگر این استوانه با سرعت زاویه ای ω حول محور z ها دوران کند، پتانسیل برداری مغناطیسی \vec{A} در فواصل دور R ($h, a \ll R$) با فاصله R چه رابطه ای دارد؟

$$A \propto \frac{1}{R^4} \text{ (۴)}$$

$$A \propto \frac{1}{R^3} \text{ (۳)}$$

$$A \propto \frac{1}{R^2} \text{ (۲)}$$

$$A \propto \frac{1}{R} \text{ (۱)}$$

۶- آهنربای دائمی با مغناطیس شدگی $M_0 \hat{z}$ با شعاع a و ارتفاع a را بر روی محور z ها در نظر بگیرید. حال اگر سیملوله ای با n دور در واحد طول به شعاع $2a$ و ارتفاع a هم محور با آهنربا قرار دهیم جهت و مقدار جریان سیملوله چطور باشد که شدت میدان مغناطیسی در مرکز آهنربا صفر گردد؟

$$\frac{M_0}{2n} \sqrt{\frac{17}{5}} \text{ در جهت } \hat{\phi} \text{ (۲)}$$

$$-\frac{M_0}{n} \text{ در جهت } \hat{\phi} \text{ (۱)}$$

$$-\frac{M_0}{2n} \sqrt{\frac{17}{5}} \text{ در جهت } \hat{\phi} \text{ (۴)}$$

$$\frac{M_0}{n} \text{ در جهت } \hat{\phi} \text{ (۳)}$$

۷ - استوانه‌ای به شعاع a و طول نامحدود با محور منطبق بر محور z ها به صورت $\vec{M} = M_0 \hat{z}$ مغناطیس شده است. بردار پتانسیل مغناطیسی در $\vec{r} = \frac{a}{\sqrt{2}}$ کدام است؟

$$\mu_0 M_0 \hat{\phi} \quad (1) \quad \frac{1}{2} \mu_0 M_0 \hat{\phi} \quad (2) \quad \frac{1}{4} \mu_0 M_0 \hat{\phi} \quad (3) \quad \frac{1}{8} \mu_0 M_0 \hat{\phi} \quad (4)$$

۸ - کره‌ای به شعاع $a \ll 1$ به صورت $M_0 \hat{z}$ مغناطیس شده است. در این صورت نسبت اندازه چگالی شار مغناطیسی در نقطه‌ی $(R=1, \phi=0, \theta=0)$ به اندازه‌ی چگالی شار مغناطیسی در نقطه‌ی $(R=2, \phi=0, \theta=\frac{\pi}{2})$ کدام است؟

$$(1) \quad 2 \quad (2) \quad 4 \quad (3) \quad 8 \quad (4) \quad 16$$

۹ - در فصل مشترک دو محیط مغناطیسی که $z=0$ می‌باشد، جریان سطحی $\vec{J}_S = 2\hat{x} + 3\hat{y}$ برقرار است. اگر در محیط $z < 0$ که دارای $\mu_1 = 2$ شدت میدان مغناطیسی به صورت $H_1 = 4\hat{x} - 2\hat{y} + 2\hat{z}$ باشد. مطلوبست بردار مغناطیس‌شدگی \vec{M}_2 در ناحیه $z > 0$ که دارای $\mu_2 = 5$ است.

$$(1) \quad 4\hat{x} + 3/2\hat{z} \quad (2) \quad 28\hat{x} - 16\hat{y} + 3/2\hat{z}$$

$$(3) \quad 28\hat{x} + 16\hat{y} + 3/2\hat{z} \quad (4) \quad 28\hat{x} + 3/2\hat{z}$$

۱۰ - دو قطبی مغناطیسی میکروسکوپی $m_0 \hat{y}$ واقع در مبدا مختصات مفروض است. بردار پتانسیل مغناطیس \vec{A} در فاصله‌ی a از مبدأ و روی نیم‌ساز ربع دوم صفحه‌ی xoy کدام است؟

$$(1) \quad \frac{\mu_0 m_0 \sqrt{2}}{4\pi a^2} (-\hat{z}) \quad (2) \quad \frac{\mu_0 m_0 \sqrt{2}}{4\pi a^2} (\hat{z}) \quad (3) \quad \frac{\mu_0 m_0 \sqrt{2}}{4\pi a^2} (\hat{x}) \quad (4) \quad \frac{\mu_0 m_0 \sqrt{2}}{8\pi a^2} (\hat{x})$$

۱۱ - استوانه‌ای طویل با شعاع a هم محور با محور z ها به صورت $\vec{M} = kr^2 \hat{\phi}$ مغناطیس شده است چگالی شار مغناطیسی \vec{B} در فاصله‌ی $\frac{a}{\sqrt{2}}$ از محور استوانه کدام است؟

$$(1) \quad \frac{1}{2} \mu_0 k_0 \hat{\phi} \quad (2) \quad \mu_0 k_0 \hat{\phi} \quad (3) \quad \frac{1}{4} \mu_0 k_0 \hat{\phi} \quad (4) \quad \text{صفر}$$

۱۲ - یک استوانه‌ی بی‌نهایت طویل به شعاع a به صورت $\vec{M} = kr \vec{a}_z$ مغناطیس شده است میدان مغناطیسی B در داخل استوانه کدام است؟

$$(1) \quad \mu_0 kr \vec{a}_z \quad (2) \quad \text{صفر} \quad (3) \quad -\mu_0 kr \vec{a}_z \quad (4) \quad -\frac{1}{2} \mu_0 kr^2 \vec{a}_z$$

الکترومغناطیس

۱- گزینه «۲» صحیح است.

$$Q = \int \rho dV = \int r r (1 + \cos \theta) \sin^2 \varphi r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi = \int r^3 (\sin \theta + \sin \theta \cos \theta) \sin^2 \varphi dr d\theta d\varphi$$

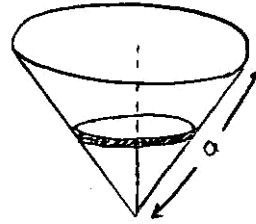
$$= \left(\frac{r^4}{4}\right) (-\cos \theta - \frac{1}{4} \cos^2 \theta) \cdot \int_0^\pi \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cos^2 \varphi\right) d\varphi = \frac{1}{4} \times 16 \times 2 \times \pi = 16\pi$$

۲- گزینه «۲» صحیح است.

$$\rho_s = \rho dz = \rho \cos \varphi \Delta R = \rho \frac{\sqrt{r}}{r} dR$$

$$dE = \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} (1 - \cos \varphi) = \rho \frac{\sqrt{r}}{4\epsilon_0} dR (1 - \frac{\sqrt{r}}{r})$$

$$E = \frac{\rho(\sqrt{r}-1)}{4\epsilon_0} R \Big|_0^a = \frac{\rho a(\sqrt{r}-1)}{4\epsilon_0}$$



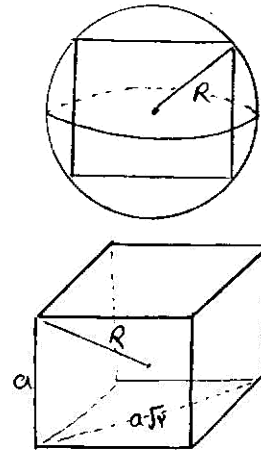
۳- گزینه «۴» صحیح است.

$$\sqrt{r}a + a^2 = rR$$

$$\sqrt{ra^2 + a^2} = rR \Rightarrow \sqrt{ra} = rR \Rightarrow a = \frac{rR}{\sqrt{r}}$$

$$\left. \begin{aligned} Q_{in} &= \rho \times a^2 \\ \rho &= \frac{q}{\frac{4\pi}{3} R^3} \end{aligned} \right\} \Rightarrow Q_{in} = \frac{q}{\frac{4\pi}{3} R^3} \times \left(\frac{rR}{\sqrt{r}}\right)^2 = \frac{rq}{\pi\sqrt{r}}$$

$$\phi_D = \frac{Q_{in}}{\epsilon} = \frac{q}{3\sqrt{r}\pi}$$



۴- گزینه «۳» صحیح است.

$$\vec{P} = np_0 \hat{z}$$

$$\rho_b = -\nabla \cdot \vec{P} = 0$$

$$\rho_{sb} = \vec{P} \cdot \vec{a}_r = 0 \text{ روی سطح جانبی استوانه}$$

$$\rho_{sb}^+ = \vec{P} \cdot \vec{a}_z = np_0 \text{ روی قاعده بالایی استوانه}$$

$$\rho_{sb}^- = \vec{P} \cdot (-\vec{a}_z) = -np_0 \text{ روی قاعده پایینی استوانه}$$

$$E = r |E|_{\text{onedisc}} = r \left(\frac{np_0}{2\epsilon_0} \right) (1 - \cos \varphi) = \left(\frac{np_0}{\epsilon_0} \right) \left(1 - \frac{\sqrt{r}}{r} \right)$$

۵- گزینه «۳» صحیح است.

نتیجه قطبی شدگی به وجود آمدن دوبار مقید سطحی در قاعده بالایی و پایینی خواهد بود که وقتی با سرعت زاویه ای ω حول محور Z دوران کند نتیجه دو جریان چرخشی خواهد بود که هر کدام یک دوقطبی مغناطیسی خواهد بود که چون A در فواصل دور با فاصله رابطه $A \propto \frac{1}{R^{n+1}}$ دارد و n نیز از رابطه زیر بدست می آید ، خواهیم داشت :

$$\text{poles } r^n = 4 \Rightarrow n = 2 \Rightarrow A \propto \frac{1}{R^3}$$

۶- گزینه «۴» صحیح است.

$$\left. \begin{aligned} B_\gamma &= \mu_0 M_0 \cos \alpha \rightarrow \cos \alpha = \frac{\frac{a}{r}}{\sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \\ B_r &= \mu_0 n I \cos \beta \rightarrow \cos \beta = \frac{\frac{a}{r}}{\sqrt{4a^2 + \frac{a^2}{4}}} = \frac{1}{\sqrt{17}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow B_\gamma = B_r \Rightarrow \mu_0 M_0 \cos \alpha = \mu_0 n I \cos \beta$$

$$I = \frac{M_0 \cos \alpha}{n \cos \beta} = \frac{M_0 \frac{1}{\sqrt{5}}}{n \frac{1}{\sqrt{17}}} = \frac{M_0 \sqrt{17}}{n \sqrt{5}}$$

و جهت جریان بایستی در جهت $\hat{\phi}$ باشد

۷- گزینه «۳» صحیح است.

استوانه ی $M_0 \hat{z}$ همانند سولونوئید رفتار می کند $nI \sim M_0$

$$\vec{B} = \mu_0 M_0 \hat{z} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{1}{r} \begin{vmatrix} \hat{a}_r & r\hat{a}_\phi & \hat{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & rA_\phi & 0 \end{vmatrix} \text{ داخل آهنربان}$$

$$\vec{B} = \mu_0 M_0 \hat{z} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [rA_\phi] \hat{z} \Rightarrow rA_\phi = \frac{1}{4} \mu_0 M_0 r^2 + C$$

$$r=0 \Rightarrow C=0$$

$$A_\phi = \frac{1}{4} \mu_0 M_0 r \rightarrow \vec{A} \left(r = \frac{a}{4} \right) = \frac{1}{4} \mu_0 M_0 \hat{\phi}$$

۸- گزینه «۴» صحیح است.

$$\vec{m} = \int \vec{M} dV = \int M_0 \hat{z} dV = M_0 \left[\frac{4\pi}{3} a^3 \right]$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 |m|}{4\pi R^3} [\gamma \cos \theta \vec{a}_R + \sin \theta \vec{a}_\theta]$$

$$\left. \begin{aligned} |B_\gamma| &= \left| \frac{\mu_0 |m|}{4\pi (\gamma)^3} \gamma \vec{a}_z \right| \\ |B_r| &= \left| \frac{\mu_0 |m|}{4\pi (\gamma)^3} (-\vec{a}_z) \right| \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{B_\gamma}{B_r} = \frac{\gamma}{\frac{1}{\lambda}} = 16$$

۹- گزینه «۲» صحیح است.

$$\vec{M}_r = (\mu_{r_1} - 1) \vec{H}_r = 4 \vec{H}_r$$

$$B_{\gamma z} = B_{rz} \Rightarrow \mu_0 \mu_{r_1} H_{\gamma z} = \mu_0 \mu_{r_1} H_{rz} \Rightarrow H_{rz} = \frac{\mu_{r_1}}{\mu_{r_1}} H_{\gamma z} = \frac{\gamma}{5} \times \gamma = 0.4$$

$$H_{rt} = (\gamma \hat{x} - \gamma \hat{y}) - \gamma \hat{y} + \gamma \hat{x} = -\gamma \hat{y} + \gamma \hat{x}$$

$$H_r = -\gamma \hat{y} + \gamma \hat{x} + 0.4 \hat{z}$$

$$\vec{M}_r = +2.8 \hat{x} - 1.6 \hat{y} + 3.2 \hat{z}$$

۱۰- گزینه «۲» صحیح است.

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 |m|}{4\pi R^3} \sin(\gamma \delta) (+\hat{z}) = \frac{\mu_0 m_0}{4\pi a^3} \left(\frac{\sqrt{\gamma}}{\gamma} \right) (+\hat{z}) = \left[\frac{\mu_0 m_0 \sqrt{\gamma}}{4\pi a^3} \right] \hat{z}$$

۱۱- گزینه «۳» صحیح است.

$$\vec{J}_b = \vec{\nabla} \times \vec{M} = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} \vec{a}_r & r\vec{a}_\phi & \vec{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & kr^\gamma & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (kr^\gamma) \hat{z} = (\gamma kr) \hat{z}$$

$$\vec{J}_{sb}(r=a) = \vec{M} \times \vec{a}_r = ka^\gamma \hat{a}_\phi \times \hat{a}_r = -ka^\gamma \vec{a}_z$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{in} \Rightarrow B_{in}(\gamma \pi r) = \mu_0 I_{in}$$

$$I_{in} = \int_0^r (\gamma kr) r dr d\phi = \gamma \pi k r^\gamma$$

$$B_{in}(\gamma \pi r) = \mu_0 \gamma \pi k r^\gamma \Rightarrow \vec{B}_{in} = \mu_0 k r^\gamma \hat{\phi} \Rightarrow B\left(r = \frac{a}{\gamma}\right) = \frac{1}{\gamma} \mu_0 k \hat{\phi}$$

۱۲- گزینه «۱» صحیح است.

طبق رابطه‌ی $\oint \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = I_{in}$ چون مجموع جریان‌های داخل استوانه صفر است (چرا؟)

$H_{out} = 0$ می‌شود در نتیجه $H_{in} = 0$ خواهد شد $[H_{\gamma t} = H_{rt}]$ پس:

$$\vec{B} = \mu_0 [\vec{M} + \vec{H}] \Rightarrow \vec{B}_{in} = \mu_0 \vec{M} = \mu_0 k r \vec{a}_z$$