الکترومغناطیس

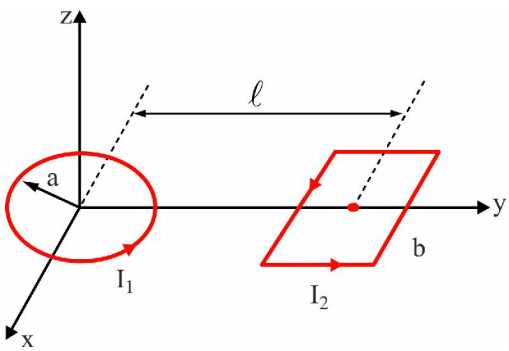
۱ . صفحه‌ی $z=0$ شامل بار سطحی غیریکنواخت $\rho_s = ay^2\left(\frac{C}{m^2}\right)$ می‌باشد. کل باری که در کره‌ای به شعاع یک متر و به مرکز $(0,0,0.5)$ واقع شده، کدام است؟

۱) $Q=\frac{9\pi a}{32}$ ۲) $Q=\frac{3\pi a}{32}$ ۳) $Q=\frac{3\pi a}{64}$ ۴) $Q=\frac{9\pi a}{64}$

۲ . بارهای نقطه‌ای مثبت Q_i در نقاط $(0,0,z_i)$ قرار گرفته‌اند. با فرض $Q_i=\frac{1}{3^i}(C)$ و $z_i=3^i(m)$، $i=0,1,2,...$، مقدار پتانسیل در مبدأ مختصات کدام است؟ فرض کنید پتانسیل در بی‌نهایت برابر صفر باشد.

۱) $V=\frac{3}{16\pi\varepsilon_0}$ ۲) $V=\frac{9}{16\pi\varepsilon_0}$ ۳) $V=\frac{9}{32\pi\varepsilon_0}$ ۴) $V=\frac{3}{32\pi\varepsilon_0}$

۳ . در شکل زیر، در یک حلقه‌ی دایره‌ای کوچک به شعاع a جریان I_1 جاری است؛ و حلقه‌ی مربعی کوچک به ضلع b با جریان I_2 در فاصله‌ی ℓ از آن قرار دارد؛ به طوری که $a,b \ll \ell$ هستند و می‌توان میدان‌های حلقه‌ها را روی یکدیگر ثابت فرض نمود، گشتاور مغناطیسی وارد بر حلقه‌ی مربعی، کدام است؟



۱) $-\frac{\mu_0 \pi a^2 b^2 I_1 I_2}{4\ell^3}\hat{a}_x$

۲) $-\frac{\mu_0 a^2 b^2 I_1 I_2}{4\ell^3}\hat{a}_x$

۳) $-\frac{\mu_0 \pi a^2 b^2 I_1 I_2}{2\ell^2}\hat{a}_x$

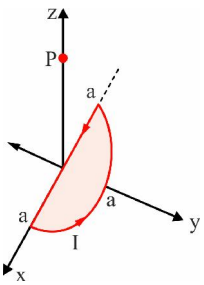
۴) $-\frac{\mu_0 \pi a^2 b^2 I_1 I_2}{2\ell}\hat{a}_x$

www.topsoal.ir

۴ . بین دو پوسته‌ی کروی رسانا $(a<r<b)$ از ماده‌ای با رسانایی $\sigma(r)=\frac{\sigma_0}{r^2}$ پر شده است، که در آن r شعاع دستگاه کروی و b,a و σ_0 مقادیر ثابتی هستند. اگر سطح $r=a$ در پتانسیل صفر و سطح $r=b$ در پتانسیل V_0 باشد، چگالی جریان در این ناحیه کدام است؟

۱) $\vec{J}=\frac{-\sigma_0 V_0}{r^2(b-a)}\hat{a}_r$ ۲) $\vec{J}=\frac{-\sigma_0 V_0}{r\ln\left(\frac{b}{a}\right)}\hat{a}_r$ ۳) $\vec{J}=\frac{-\sigma_0 V_0}{r^2\ln\left(\frac{b}{a}\right)}\hat{a}_r$ ۴) $\vec{J}=\frac{-\sigma_0 V_0}{r(b-a)}\hat{a}_r$

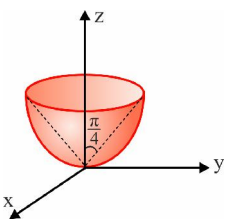
۵ . حلقه‌ی جریان شامل یک نیم دایره به مرکز مبدأ مختصات و شعاع a و یک پاره‌خط به طول $2a$ هر دو، روی صفحه‌ی xy مطابق شکل زیر داده شده است. اگر بدانیم $\int\frac{d\alpha}{\cos\alpha}=\ln\left(\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)$ است؛ پتانسیل مغناطیسی برداری در نقطه‌ی $P(0,0,a)$ کدام است؟



۱) $\frac{\mu_0 I}{4\pi}\left[2\ln\frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}+\sqrt{2}\right]\hat{a}_x$ ۲) $\frac{\mu_0 I}{4\pi}\left[\ln\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}-\sqrt{2}\right]\hat{a}_x$

۳) $\frac{\mu_0 I}{4\pi}\left[\ln\frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}-\sqrt{2}\right]\hat{a}_x$ ۴) $\frac{\mu_0 I}{4\pi}\left[\ln\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}+\sqrt{2}\right]\hat{a}_x$

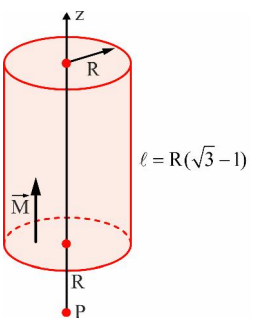
۶ . مطابق شکل زیر، حفره‌ای به شکل مخروط با زاویه‌ی بازشدگی $\frac{\pi}{4}$ از نیم کره‌ای با چگالی حجمی یکنواخت ρ_0 از بار الکتریکی، به شعاع a و مرکز منطبق بر $z=a$ خارج شده است. میدان الکتریکی در مبدأ مختصات برابر کدام است؟



۱) $-\frac{\rho_0 a}{12\varepsilon_0}\hat{a}_z$ ۲) $-\frac{\rho_0 a}{8\varepsilon_0}\hat{a}_z$

۳) $-\frac{\rho_0 a\sqrt{2}}{12\varepsilon_0}\hat{a}_z$ ۴) $-\frac{\rho_0 a\sqrt{2}}{8\varepsilon_0}\hat{a}_z$

۷ . یک استوانه به شعاع R و طول $\ell=R\left(\sqrt{3}-1\right)$ از جنس ماده‌ی مغناطیسی Magnetization یکنواخت و $\vec{M}=M_0\hat{a}_z$ مطابق شکل زیر وجود دارد. مقدار $\vec{B}$ (بردار اندکسیون مغناطیسی) در نقطه‌ی P روی محور استوانه به اندازه‌ی R پایین‌تر از آن، چقدر است؟



۱) $B_z=\frac{\mu_0 M_0}{4}\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)$

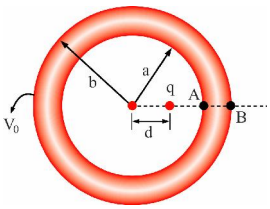
۲) $B_z=\frac{\mu_0 M_0}{4}\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)$

۳) $B_z=\frac{\mu_0 M_0}{2}\left(\sqrt{3}-1\right)$

۴) $B_z=\frac{\mu_0 M_0}{2}\left(\sqrt{3}+1\right)$

www.topsoal.ir

۸ . یک پوسته‌ی رسانای کروی به شعاع داخلی a و خارجی b، مطابق شکل، در پتانسیل V_0 نگهداشته شده است. بار نقطه‌ای q در فاصله‌ی $d\,(d<a)$ از مرکز پوسته‌های کروی واقع است. چگالی بار سطحی در نقاط A و B به ترتیب کدام است؟



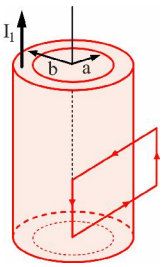
۱) $\frac{2\varepsilon_0 V_0}{a+b}, \frac{-q}{4\pi a(a-d)}$

۲) $\frac{2\varepsilon_0 V_0}{a+b}, \frac{-q}{4\pi b(b-d)}$

۳) $\frac{\varepsilon_0 V_0}{a+b}, \frac{-q(b+d)}{4\pi b(b-d)}$

۴) $\frac{\varepsilon_0 V_0}{b}, \frac{-q(a+d)}{4\pi a(a-d)^2}$

۹ . در ناحیه استوانه‌ای بی‌نهایت طویل $a<r<b$ و $0\le\varphi\le 2\pi$، جریان I_1 با توزیع یکنواخت در جهت موازی محور z مطابق شکل جاری است. در حلقه‌ی مربعی به ضلع $2b$ جریان I_2 جاری است؛ و یک ضلع مربع روی محور استوانه قرار دارد. نیروی وارد بر این قاب مربعی کدام است؟



۱) $\frac{I_1 I_2}{2\pi b}$

۲) $\frac{I_1 I_2}{2\pi}$

۳) $\frac{I_1 I_2}{\pi b}$

۴) $\frac{I_1 I_2}{4\pi b}$

۱۰. در مختصات کروی، چگالی جریان الکتریکی به صورت یر در یک محیط هادی مفروض است:

$$\vec{J}=\frac{1}{r^2\sin\theta}\hat{a}_r-\frac{1}{r^2}\hat{a}_\varphi\left(\frac{A}{m^2}\right)$$

کل جریانی که در جهت $\hat{a}_z$ از یک دیسک دایره‌ای به شعاع R به مرکز محور z و مستقر در $z=h$، می‌گذرد، کدام است؟ فرض کنید $h\gg R$ باشد.

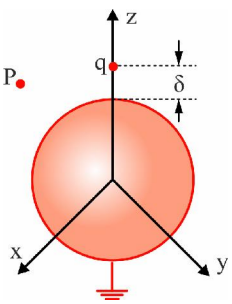
۱) $I=\frac{2\pi R}{h}$

۲) $I=\frac{4\pi R^2}{h^2}$

۳) $I=\frac{2\pi R^2}{h^2}$

۴) $I=\frac{4\pi R}{h}$

۱۱. مطابق شکل، بار نقطه‌ای $q[c]$ در فاصله‌ی ناچیز δ بالای یک کره‌ی هادی به شعاع a زمین شده، قرار دارد. با فرض این که $\delta\ll a$، $a\ll 1m$ باشد. میدان الکتریکی در نقطه‌ی P با مختصات $\phi=0$، $\theta=60^\circ$، $r=1m$ کدام است؟



۱) $\frac{q\delta}{8\varepsilon_0}\left[3\sqrt{3}\,\hat{a}_x+\left(2-\sqrt{3}\right)\hat{a}_z\right]$

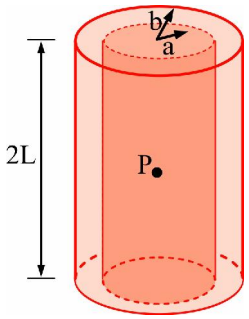
۲) $\frac{q\delta}{8\varepsilon_0}\left[3\sqrt{3}\,\hat{a}_x-\hat{a}_z\right]$

۳) $\frac{q\delta}{16\pi\varepsilon_0}\left[3\sqrt{3}\,\hat{a}_x+\left(2-\sqrt{3}\right)\hat{a}_z\right]$

۴) $\frac{q\delta}{16\pi\varepsilon_0}\left[\left(2\sqrt{3}+1\right)\hat{a}_x+\left(\sqrt{3}-b\right)\hat{a}_z\right]$

www.topsoal.ir

۱۲. یک پوسته استوانه‌ای از ماده‌ی مغناطیسی به طول $2L$ و شعاع‌های داخلی و خارجی a و b دارای بردار مغناطیس شدگی غیر یکنواخت $\vec{M} = M_0 \sin^2 \phi \hat{a}_z$ داده شده است. شدت میدان مغناطیسی $\vec{H}$ در نقطه‌ی P واقع در مرکز جسم کدام است؟



۱) $M_0 L \left(\frac{1}{\sqrt{b^2+L^2}} - \frac{1}{\sqrt{a^2+L^2}} \right) \hat{a}_z$

۲) $\frac{M_0 L}{4} \left(\frac{1}{\sqrt{b^2+L^2}} - \frac{1}{\sqrt{a^2+L^2}} \right) \hat{a}_z$

۳) $\frac{M_0 L}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{b^2+L^2}} - \frac{1}{\sqrt{a^2+L^2}} \right) \hat{a}_z$

۴) $\frac{M_0 L}{8} \left(\frac{1}{\sqrt{b^2+L^2}} - \frac{1}{\sqrt{a^2+L^2}} \right) \hat{a}_z$

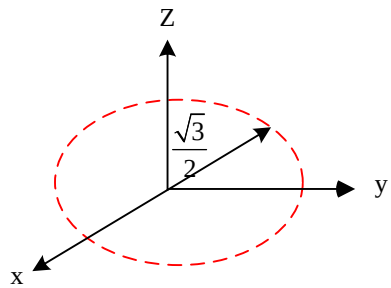
www.topsoal.ir

پاسخ تشریحی

۱ . گزینه ۴ درست است.

فرمول کره : $x^2+y^2+(z-0.5)^2=1$

$$\text{at} \quad z=0: x^2+y^2+0.5^2=1 \quad \rightarrow \quad x^2+y^2=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$



$$\begin{cases} \rho_s = ay^2\left(\frac{c}{m^2}\right) \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \rightarrow \quad \rho_s = ar^2\sin^2\varphi\left(\frac{c}{m^2}\right)$$

$$ds = rdrd\varphi$$

$$Q=\int_{s'}\rho_s ds=\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\int_0^{2\pi} ar^2\sin^2\varphi\times rdrd\varphi$$

$$Q=\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\int_0^{2\pi} ar^3\left(\frac{1-\cos 2\varphi}{2}\right)drd\varphi=\left.\frac{ar^4}{4}\right|_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\times\frac{1}{2}\times 2\pi$$

$$Q=\frac{a\pi}{4}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^4 \quad \Rightarrow \quad Q=\frac{9\pi a}{64}(c)$$

www.topsoal.ir

۲ . گزینه ۳ درست است.

$$V=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{Q_i}{4\pi\varepsilon_0 R_i}$$

$$\begin{cases} R_i=z_i=\frac{1}{3^i}(m) \\ Q_i=\frac{1}{3^i}(c) \end{cases} \rightarrow \quad V=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\frac{1}{3^i}}{4\pi\varepsilon_0\frac{1}{3^i}}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3^i}\right)^2$$

$$V=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{1}{9}\right)^i=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\times\frac{1}{1-\frac{1}{9}}$$

$$V=\frac{9}{32\pi\varepsilon_0}(v)$$

۳ . گزینه ۱ درست است.

چون $\ell \gg a$ است، پس می‌توان حلقه دایروی را به سان یک دو قطبی مغناطیسی فرض کرد.

$$\bar{B}_1=\frac{\mu_0 I_1\pi a^2}{4\pi R^3}\left(2\cos\theta\bar{a}_r+\sin\theta\bar{a}_\theta\right)$$

در محل حلقه دوم: $\theta=\frac{\pi}{2}\ ,\ \varphi=\frac{\pi}{2},|\bar{R}|=\ell$

$$\bar{B}_1=\frac{\mu_0 I_1\pi a^2}{4\pi\ell^3}(\hat{a}_\theta)$$

$$=\frac{\mu_0 I_1\pi a^2}{4\pi\ell^3}\left(\cos\theta\cos\varphi\,\hat{a}_x+\cos\theta\sin\varphi\,\hat{a}_y-\sin\theta\,\hat{a}_z\right)$$

$$\bar{B}_1=\frac{\mu_0 I_1\pi a^2}{4\pi\ell^3}(0+0-\hat{a}_z)=\frac{-\mu_0 I_1\pi a^2}{4\pi\ell^3}\hat{a}_z$$

$$\begin{matrix} T=\bar{M}_2\times\bar{B}_1 \\ \bar{M}_2=b^2 I_2\hat{a}_y \end{matrix} \rightarrow \quad T=b^2 I_2\hat{a}_y\times\left(\frac{-M_0 I_1\pi a^2}{4\pi\ell^3}\hat{a}_z\right)$$

$$T=-\hat{a}_x\frac{\mu_0\pi I_1 I_2 a^2 b^2}{4\ell^3}$$

۴ . گزینه ۱ درست است.

طبق تقارن، $\bar{J}$ تنها مولفه شعاعی خواهد داشت و تابع θ و φ نیست لذا:

$$\bar{J}=J_r(r)\hat{a}_r$$

$$\nabla.\bar{J}=0 \quad\rightarrow\quad \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 J_r\right)=0 \quad\rightarrow\quad r^2 J_r=I_0=cte$$

$$J_r=\frac{I_0}{r^2}$$

$$\bar{J}=\sigma\bar{E} \quad\rightarrow\quad \frac{I_0}{r^2}=\frac{\sigma_0}{r^2}E_r \quad\rightarrow\quad E_r=\frac{I_0}{\sigma_0}$$

www.topsoal.ir

$$\int \vec{E}.\overline{dr} = V_0 \quad \rightarrow \quad -\int_{r=a}^{r=b} Edr = V_0 \quad \rightarrow \quad -\frac{I_0}{\sigma_0}(b-a) = V_0$$

$$I_0 = \frac{-V_0\sigma_0}{b-a} \quad \rightarrow \quad \overline{J} = \frac{-V_0\sigma_0}{(b-a)r^2}\hat{a}_r$$

۵ . گزینه ۲ درست است.

$$\overline{A} = \overline{A}_1 + \overline{A}_2$$

$$\overline{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{Id\ell'}{R}$$

$$\overline{A}_1 : \overline{A}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{Id\ell'}{R}$$

$$\overline{d\ell'} = dx'\hat{a}_x$$

$$\overline{R} = \overline{r} - \overline{r}' = a\hat{a}_z - x\hat{a}_x$$

$$|\overline{R}| = \left(a^2 + x^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\overline{A}_1 : \frac{\mu_0}{4\pi} I\hat{a}_x \int_{-a}^{a} \frac{dx'}{\left(x^2+a^2\right)^{\frac{1}{2}}} = \hat{a}_x \frac{\mu_0}{4\pi}\left(\ln\left(x + \left(x^2+a^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)\right)_{-a}^{a}$$

$$\overline{A}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} I\hat{a}_x \left(\ln\frac{a + a\sqrt{2}}{-a + a\sqrt{2}}\right) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \ln\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}\hat{a}_x$$

$$\overline{A}_2 : \overline{d\ell'} = ad\varphi'\hat{a}_{\varphi'}$$

$$\overline{R} = \overline{r} - \overline{r}' = aa'_z - a\hat{a}_{r'} \quad \rightarrow \quad |\vec{R}| = a\sqrt{2}$$

$$\overline{A}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_0^{\pi} \frac{Iad\varphi'\hat{a}_\varphi}{a\sqrt{2}} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_0^{\pi} \frac{\left(-\sin\varphi'\hat{a}_x + \cos\varphi'\hat{a}_y\right)}{\sqrt{2}} d\varphi'$$

$$\overline{A}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{\sqrt{2}}{2} \times \left(\cos\varphi'\hat{a}_x + \sin\varphi'\hat{a}_y\right)\Big|_0^{\pi} = -\frac{\mu_0}{4\pi} I\sqrt{2}\,\hat{a}_x$$

$$\overline{A} = \overline{A}_1 + \overline{A}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} I\left[\ln\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} - \sqrt{2}\right]$$

۶ . گزینه ۳ درست است.

$$dQ = \rho_0 R^2 \sin\theta\, dR\, d\theta\, d\varphi$$

$$\vec{R} = -R\vec{a}_R$$

$$\vec{E} = \int \frac{dQ\vec{R}}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{R}|^3} = \int \frac{\left(\rho_0 R^2 \sin\theta\, dR d\theta\, dR d\theta d\varphi\right)\left(-R\vec{a}_R\right)}{4\pi\varepsilon_0 R^3}$$

$$= \frac{-\rho_0(2\pi)}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2a\cos\theta} dR\left(\sin\theta\cos\theta d\theta\right)a_z = -\frac{\rho_0 a}{\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{3}\cos^3\theta\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \vec{a}_z = -\frac{\rho_0 a\sqrt{2}}{12\varepsilon_0}\vec{a}_z$$

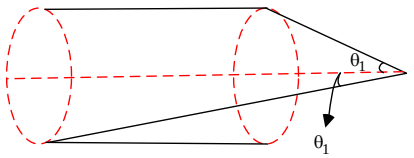
www.topsoal.ir

۷ . گزینه ۱ درست است.

$$\bar{M} = M_0 \hat{a}_z$$

$$\bar{J}_{m.v} = \bar{V} \times \bar{M} = 0$$

$$\bar{J}_{ms} = \bar{M} \times \hat{a}_x = M_0 \hat{a}_z \times \hat{a}_\rho = M_0 \hat{a}_\varphi$$



$$\bar{B} = \frac{\mu_0 NI}{2}\left(\cos\theta_2 - \cos\theta_1\right)$$

در این مسأله $NI_0 = M_0$ و

$$\begin{cases} \cos\theta_1 = \dfrac{R}{\sqrt{R^2+R^2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos\theta_1 = \dfrac{R+L}{\sqrt{R^2+(R+L)^2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \rightarrow \quad B_z = \frac{\mu_0}{2} M_0 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$B_z = \frac{\mu_0 M_0}{4}\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)$$

۸ . گزینه ۴ درست است.

$$V_0 = \frac{Q_B}{4\pi\varepsilon_0 b} \quad \rightarrow \quad Q_b = 4\pi\varepsilon_0 b V_0$$

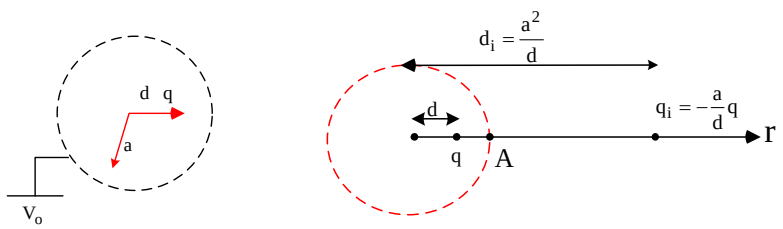
$$\rho_{sb} = \frac{Q_b}{4\pi b^2} = \frac{4\pi\varepsilon_0 b v_0}{4\pi b^2} = \frac{\varepsilon_0 v_0}{b}$$

چون تمام نقاط یک هادی هم پتانسیل است بنابراین سطح کره داخلی نیز v_0 است، پس مساله به‌صورت زیر ساده می‌شود.

طبق قضیه تصاویر می‌توان بار تصویری، میزان $-q\frac{a}{d}$ در فاصله $\frac{a^2}{d}$ قرار داد، این بار تصویر سبب صفر شدن پتانسیل کره می‌شود.

حال باری با چگالی سطحی یکنواخت روی کره قرار می‌دهیم تا پتانسیل v_0 را تأمین کند.

این بار یکنواخت هیچ میدانی درون کروه تولید نمی‌کند.



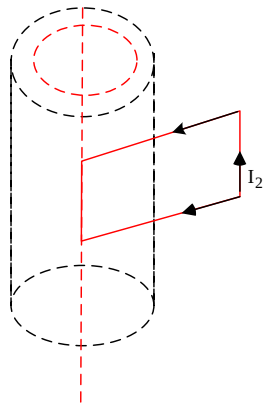
$$\bar{E}_A = \frac{q\hat{a}_r}{4\pi\varepsilon_0 (a-d)^2} + \frac{\frac{a}{d} q\hat{a}_r}{4\pi\varepsilon_0\left(\frac{a^2}{d} - a\right)^2} \rightarrow \rho_A = E_A \varepsilon_0$$

www.topsoal.ir

$$\rho_A = \frac{-q}{4\pi}\left(\frac{1}{(a-d)^2} + \frac{\frac{a}{d}}{4\pi\left(\frac{a^2}{d}-a\right)^2}\right) = \frac{-q(a+d)}{4\pi a(a-d)^2}$$

۹ . گزینه ۲ درست است.

نیروی وارد بر این دو تکه سیم قرینه یکدیگرند. پس تنها نیروی وارد به قسمت هم راستای محور z محاسبه می‌گردد.



$$\bar{B}_1 = \begin{cases} \dfrac{\mu_0 \bar{I}_1 (r^2 - a^2)}{2\pi(b^2 - a^2) r} & a < r < b \\ \dfrac{\mu_0 I_1}{2\pi r} & r > b \\ 0 & r > a \end{cases}$$

$$F = I_2 L B_1 \quad , \quad L = 2b \quad , \quad B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r} \quad , \quad r = 2b$$

$$F = I_2 \times 2b \times \frac{\mu_0 I_1}{2\pi \times 2b} \quad \rightarrow \quad F = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}$$

۱۰ . گزینه ۱ درست است.

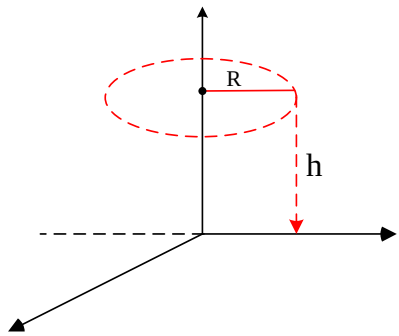
$$\bar{J} = \frac{1}{r^2 \sin\theta}\hat{a}_r - \frac{1}{r^2}\hat{a}_\varphi$$

$$dS = \rho d\rho d\varphi \hat{a}_z \quad \text{at} \quad z = h \ , \ 0 < \rho < R \quad , \quad 0 < \varphi < 2\pi$$

$$I = \int_S \bar{J}.\overline{dS} = \iint \left(\frac{1}{r^2 \sin\theta}\right) \underbrace{\hat{a}_r . \hat{a}_z}_{\cos\theta} - \frac{1}{r^2}\hat{a}_\varphi \int_0 (\hat{a}_z) \rho d\rho d\varphi$$

$$I = \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta}{r^2 \sin\theta} \rho d\rho d\varphi = 2\pi \int_0^R \frac{\cos\theta}{r^2 \sin\theta} \rho d\rho$$

www.topsoal.ir



$$\begin{cases} r\sin\theta = \rho \\ r\cos\theta = h \end{cases} \rightarrow \quad I = 2\pi\int_0^R \frac{h}{r^2}d\rho$$

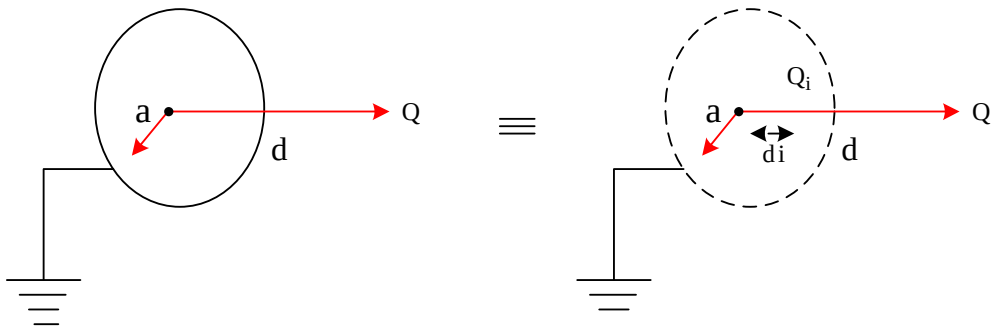
$$r^2 = \rho^2 + h^2 \quad \rightarrow \quad I = 2\pi\int_0^R \frac{h}{h^2+\rho^2}d\rho = 2\pi h\int_0^R \frac{d\rho}{h^2+\rho^2}$$

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a} \quad \rightarrow \quad I = 2\pi h \times \frac{1}{h}\tan^{-1}\frac{\rho}{h}\Big|_0^R$$

$$I = 2\pi\tan^{-1}\frac{R}{h}$$

$$h \gg R \quad \rightarrow \quad \frac{R}{h} \ll 1 \quad \rightarrow \quad \tan^{-1}\frac{R}{h} \simeq \frac{R}{h} \quad \rightarrow \quad I = \frac{2\pi R}{h}$$

۱۱. گزینه ۲ درست است.



طبق قضیه تصاویر: $Q_i = -\frac{a}{d}Q \quad , \quad d_i = \frac{a^2}{d}$

در این سوال: $d = a + \delta \begin{cases} d_i = \frac{a^2}{a+\delta} \xrightarrow{\delta \ll a} d_i \simeq a - \delta \\ Q_i = -\frac{a}{a+\delta}Q \simeq -Q \end{cases}$

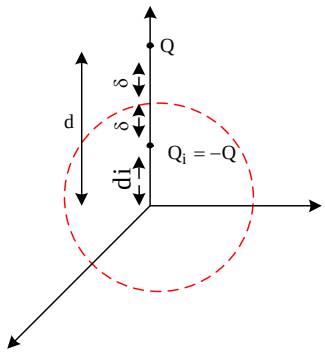
چون $a \ll 1$ است، بنابراین می‌توان بار و تصویرش را به عنوان یک دو قطبی الکتریکی در مبدأ مختصات در نظر گرفت و میدان دوقطبی عبارت است از:

$$\bar{E} = \frac{\rho}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\left(2\cos\theta\hat{a}_r + \sin\theta\hat{a}_\theta\right) \quad , \quad \varphi = 0 \quad , \quad \theta = 60^\circ \quad , \quad r = 1m$$

$$P = Q(2\delta)$$

www.topsoal.ir

$$\begin{cases}\bar{a}_r = \frac{\sqrt{3}}{2}\hat{a}_x + \frac{1}{2}\hat{a}_z \\ \hat{a}_\theta = \frac{1}{2}\hat{a}_x - \frac{\sqrt{3}}{2}\hat{a}_z\end{cases} \rightarrow \bar{E} = \frac{2Q\delta}{4\pi\varepsilon_0}\left(2\times\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\hat{a}_x + \frac{1}{2}\hat{a}_z\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{2}\hat{a}_x - \frac{\sqrt{3}}{2}\hat{a}_z\right)\right)$$



$$\bar{E} = \frac{2Q\delta}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\hat{a}_x + \frac{1}{2}\hat{a}_z + \frac{\sqrt{3}}{4}\hat{a}_x - \frac{3}{4}\hat{a}_z\right)$$

$$\bar{E} = \frac{Q\delta}{8\pi\varepsilon_0}\left(3\sqrt{3}\hat{a}_x - \hat{a}_z\right)$$

۱۲. گزینه ۳ درست است.

$$\bar{J}_{mv} = \nabla\times\bar{M} = \nabla\times\left(M_0\sin^2\varphi\hat{a}_z\right)$$

$$= \frac{1}{r}\begin{vmatrix}\hat{a}_r & r\hat{a}_\varphi & \hat{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & M_0\sin^2\varphi\end{vmatrix} = \frac{1}{r}\left[\hat{a}_r\left(2M_0\sin\varphi\cos\varphi\right)\right]$$

$\vec{J}_{mv} = \frac{1}{r}2M_0\sin\varphi\hat{a}_r \rightarrow$ جریان شعاعی هیچ میدان در راستای خود تولید نمی‌کند.

$$\bar{J}_{ms} = \begin{cases}\bar{M}\times\bar{a}_r & \text{for} \quad r=b \\ \bar{M}\times\left(-\bar{a}_r\right) & \text{for} \quad r=a\end{cases} = \begin{cases}M_0\sin^2\varphi\hat{a}_z\times\hat{a}_r = M_0\sin^2\varphi\hat{a}_\varphi & r=b \\ M_0\sin^2\varphi\hat{a}_z\times\left(-\hat{a}_r\right) = -M_0\sin^2\varphi\hat{a}_\varphi & r=a\end{cases}$$

$$\bar{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_s\frac{\bar{J}_s\times\bar{R}ds'}{R^3}$$

$$\text{for} \quad r=a: ds' = ad\varphi' dz' \quad , \quad \bar{R} = 0 - a\hat{a}_{r'} - z'\hat{a}_z \qquad R^3 = \left(a^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$\bar{B}_a = \frac{\mu_0}{4\pi}\iint\frac{-M_0\sin^2\varphi'\hat{a}_\varphi\times\left(-a\hat{a}_r - z'\hat{a}_z\right)}{\left(a^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}ad\varphi' dz'$$

$$= \frac{\mu_0 M_0}{4\pi}a\int_{-L}^{L}\int_0^{2\pi}\frac{-a\sin^2\varphi'\hat{a}_z + z'\sin^2\varphi'\hat{a}_{r'}}{\left(a^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}d\varphi dz' = \hat{a}_z\frac{\mu_0 M_0 a^2}{4\pi}\times(-\pi)\int_{-L}^{L}\frac{dz'}{\left(a^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

www.topsoal.ir

$$\frac{2L}{a^2\sqrt{a^2+L^2}}$$

$$\begin{cases} \overline{B}_a = \dfrac{-\hat{a}_z \mu_0 M_0 L}{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{a^2+L^2}}\right) \\ \overline{B}_b = \dfrac{\hat{a}_z \mu_0 M_0 L}{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{b^2+L^2}}\right) \end{cases} \rightarrow \quad \overline{H} = \frac{M_0 L}{2}\hat{a}_z\left(\frac{1}{\sqrt{b^2+L^2}} - \frac{1}{\sqrt{a^2+L^2}}\right)$$

www.topsoal.ir