

## الکترومغناطیس

۱ - اگر  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  باشد و حجم  $V$  کره‌ای به شعاع  $a$  و مرکز مبدأ مختصات، مقدار انتگرال زیر کدام است؟

$$I = \int_V (\mathbf{r}^2 + \mathbf{r} + 3) \vec{\nabla} \cdot \left( \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} \right) dV$$

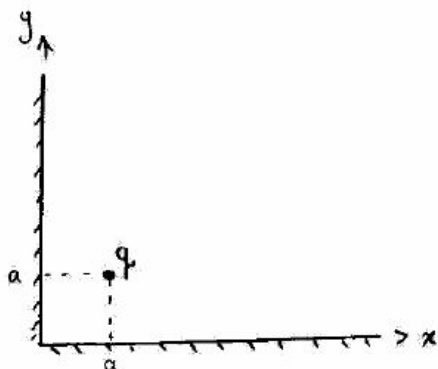
(۴)  $36\pi$

(۳)  $24\pi$

(۲)  $12\pi$

(۱) صفر

۲ - بار نقطه‌ای  $q$  مطابق شکل زیر در مجاورت دو صفحه‌ی رسانای زمین شده قرار گرفته است. پتانسیل الکتریکی در فواصل دور  $r$  روی نیمساز دو صفحه با  $r$  چه رابطه‌ای دارد؟ ( $r \gg a$ )



(۱)  $\frac{1}{r^2}$

(۲)  $\frac{1}{r^3}$

(۳)  $\frac{1}{r^4}$

(۴)  $\frac{1}{r^5}$

۳ - بین دو پوسته‌ی گروی رسانا  $[a \leq r \leq 4a]$  ماده‌ای با گذردهی  $\epsilon = \frac{\epsilon_0}{r}$  پر شده است. اگر کره‌ی کوچکتر به پتانسیل  $V_0$  و کره‌ی بزرگتر به زمین متصل شود پتانسیل در  $r = 2a$  کدام است؟

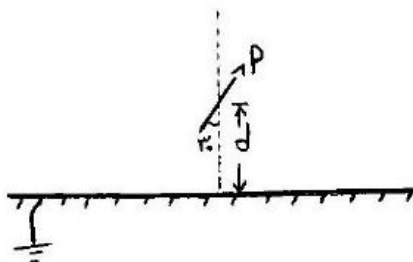
(۴)  $\frac{1}{4} V_0$

(۳)  $\frac{1}{3} V_0 \ln(2)$

(۲)  $\frac{1}{2} V_0 \ln(2)$

(۱)  $\frac{V_0}{2}$

۴ - در شکل زیر دو قطبی میکروسکوپی  $P$  به فاصله‌ی  $d$  بالای یک صفحه‌ی رسانای متصل به زمین قرار دارد. گشتاور اعمالی بر آن کدام است؟



(۱)  $\frac{P^2}{32\pi\epsilon_0 d^3}$

(۲)  $\frac{\sqrt{3} P^2}{64\pi\epsilon_0 d^3}$

(۳)  $\frac{P^2}{64\pi\epsilon_0 d^3}$

(۴)  $\frac{\sqrt{3} P^2}{32\pi\epsilon_0 d^3}$

۵ - کره‌ای به شعاع  $a$  دارای قطبی‌شدگی شعاعی به صورت  $\vec{P} = kr^2$  (در مختصات کروی) می‌باشد، شدت میدان الکتریکی در داخل کره کدام است؟

(۴)  $\frac{-3kr^2}{4\epsilon_0}$

(۳)  $\frac{-kr^2}{3\epsilon_0}$

(۲)  $\frac{-4kr^2}{3\epsilon_0}$

(۱)  $\frac{-kr^2}{\epsilon_0}$

۶ - کره‌ای به شعاع  $a$  به صورت یکنواخت قطبیده شده است  $[\vec{P} = P_0 \hat{z}]$  پتانسیل الکتریکی در نقطه‌ی

$$\left( r = 2a, \theta = \frac{\pi}{6}, \phi = 0 \right) \text{ کدام است؟}$$

$$\frac{\sqrt{3} P_0 a}{24 \epsilon_0} \quad (4)$$

$$\frac{\sqrt{3} P_0 a}{18 \pi \epsilon_0} \quad (3)$$

$$\frac{P_0 a}{18 \pi \epsilon_0} \quad (2)$$

$$\frac{P_0 a}{24 \epsilon_0} \quad (1)$$

۷ - یک ماده‌ی دی الکتریک به شکل استوانه‌ای طولی به شعاع  $a$  با حساسیت الکتریکی  $\chi_e$  در میدان الکتریکی ثابت  $E_0 \hat{x}$  قرار می‌گیرد. میدان الکتریکی در داخل استوانه کدام است؟

$$\frac{2}{\chi_e + 3} E_0 \hat{x} \quad (4)$$

$$\frac{\chi_e + 1}{\chi_e} E_0 \hat{x} \quad (3)$$

$$\frac{2}{\chi_e + 2} E_0 \hat{x} \quad (2)$$

$$\frac{2}{\chi_e + 1} E_0 \hat{x} \quad (1)$$

۸ - دو صفحه‌ی نامحدود زمین شده در  $z = 0$  و  $z = d$  قرار داده شده‌اند. بار نقطه‌ای  $q$  در نقطه‌ی  $\left( 0, 0, \frac{d}{3} \right)$  قرار می‌دهیم. بار

القائی روی صفحه  $z = d$  کدام است؟

$$-\frac{q}{3} \quad (1)$$

$$-\frac{2q}{3} \quad (2)$$

$$-\frac{q}{4} \quad (3)$$

$$-\frac{2q}{5} \quad (4)$$

$z = d$

$q$

$z = 0$

۹ - استوانه‌ی طولی به شعاع  $a$  دارای مغناطیس شدگی به صورت  $\vec{M} = r^2 \hat{\phi}$  می‌باشد  $[\hat{z}$  محور استوانه است] بردار  $B$  در داخل استوانه کدام است؟

$$\text{صفر} \quad (4)$$

$$\frac{-1}{2} \mu_0 r^2 \hat{\phi} \quad (3)$$

$$\frac{1}{2} \mu_0 r^2 \hat{\phi} \quad (2)$$

$$\mu_0 r^2 \hat{\phi} \quad (1)$$

۱۰ - کره‌ای از جنس ماده‌ی مغناطیسی با ضریب حساسیت  $\chi_m = 3$  را در یک میدان مغناطیسی یکنواخت  $B_0 \hat{z}$  قرار می‌دهیم. بردار  $B$  در داخل کره کدام است؟

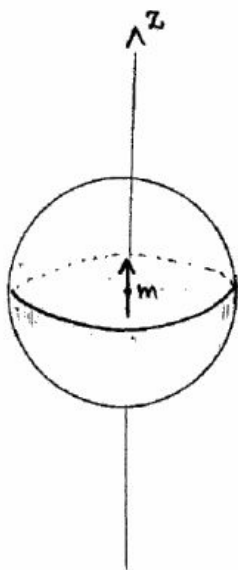
$$\frac{2}{3} B_0 \hat{z} \quad (2)$$

$$\frac{B_0}{3} \hat{z} \quad (1)$$

$$-\frac{2}{3} B_0 \hat{z} \quad (4)$$

$$2 B_0 \hat{z} \quad (3)$$

۱۱- در مرکز کره‌ای به شعاع  $a$  و دارای بار سطحی به چگالی  $\sigma$ ، دو قطبی مغناطیسی  $m \hat{z}$  قرار گرفته است که را در چه جهتی و با چه سرعت زاویه‌ای دوران دهیم تا میدان مغناطیسی در خارج کره صفر شود؟



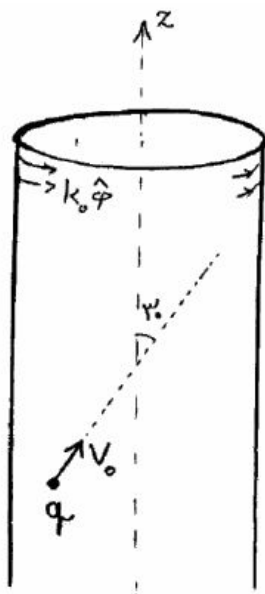
$$(1) \quad \omega = \frac{3m}{4\pi\sigma a^3} \quad \text{در جهت مثلثاتی}$$

$$(2) \quad \omega = \frac{6m}{4\pi\sigma a^3} \quad \text{در جهت مثلثاتی}$$

$$(3) \quad \omega = \frac{3m}{4\pi\sigma a^3} \quad \text{در خلاف جهت مثلثاتی}$$

$$(4) \quad \omega = \frac{6m}{4\pi\sigma a^3} \quad \text{در خلاف جهت مثلثاتی}$$

۱۲- در داخل استوانه‌ای طولی به شعاع  $a$  و دارای جریان سطحی  $\vec{k} = k_0 \hat{\phi}$ ، بار نقطه‌ای  $q$  مطابق شکل با سرعت ثابت  $V_0$  در حرکت است. اندازه‌ی نیروی وارد بر آن کدام است؟



$$(1) \quad \frac{1}{2} \mu_0 q V_0 k_0$$

$$(2) \quad \frac{\sqrt{3}}{2} \mu_0 q V_0 k_0$$

$$(3) \quad \frac{1}{4} \mu_0 q V_0 k_0$$

$$(4) \quad \frac{\sqrt{3}}{4} \mu_0 q V_0 k_0$$

## الکترومغناطیس

۱- گزینه «۲» صحیح است.

$$I = (r^{\gamma} + r + \gamma) \big|_{r=0} \times 4\pi = 12\pi$$

۲- گزینه «۲» صحیح است.

$$V \propto \frac{1}{r^{\gamma}}$$

چون نتیجه یک ۴ قطبی می‌شود:

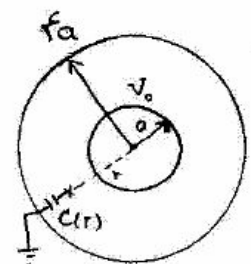
۳- گزینه «۱» صحیح است.

$$dC = \frac{\epsilon dS_r}{dr} = \frac{\left(\frac{\epsilon_0}{r}\right) r^{\gamma} d\Omega}{dr} = \frac{4\pi\epsilon_0}{\frac{dr}{r}}$$

$$\int_r^{4a} \frac{dr}{r} = \ln\left(\frac{4a}{r}\right)$$

$$V \propto \frac{1}{C} \propto \ln\left(\frac{4a}{r}\right) \Rightarrow \frac{V(r)}{V(a)} = \frac{\ln\left(\frac{4a}{r}\right)}{\ln(4)} \Rightarrow V(r) = V_0 \frac{\ln\left(\frac{4a}{r}\right)}{\ln(4)}$$

$$V(r=2a) = V_0 \frac{\ln(2)}{\ln(4)} = \frac{V_0}{2}$$



۴- گزینه «۴» صحیح است.

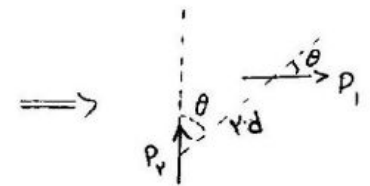
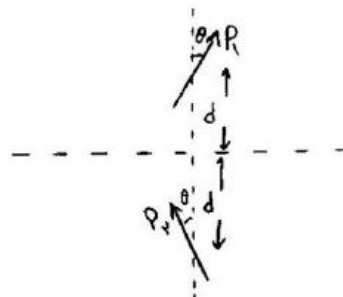
$$E_{r1} = \frac{|P_r|}{4\pi\epsilon_0 (rd)^{\gamma}} [\gamma \cos \theta \vec{a}_R + \sin \theta \vec{a}_{\theta}]$$

$$\vec{P}_1 = |P_1| [\cos \theta \vec{a}_R + \sin \theta \vec{a}_{\theta}]$$

$$\vec{\tau}_{r1} = \vec{P}_1 \times \vec{E}_{r1} = \frac{P^{\gamma}}{4\pi\epsilon_0 d^{\gamma}} [(\cos \theta \vec{a}_R + \sin \theta \vec{a}_{\theta}) \times (\gamma \cos \theta \vec{a}_R + \sin \theta \vec{a}_{\theta})]$$

$$= \frac{P^{\gamma}}{4\pi\epsilon_0 d^{\gamma}} [\cos \theta \sin \theta \vec{a}_{\phi} - \gamma \sin \theta \cos \theta \vec{a}_{\phi}]$$

$$= \frac{P^{\gamma} \sin(\gamma \theta)}{4\pi\epsilon_0 d^{\gamma}} (-\hat{a}_{\phi}) \Rightarrow |z| = \frac{P^{\gamma} \sin \gamma \cdot}{4\pi\epsilon_0 d^{\gamma}} = \frac{\sqrt{\gamma} P^{\gamma}}{4\pi\epsilon_0 d^{\gamma}}$$



۵- گزینه «۱» صحیح است.

$$\left. \begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \frac{\rho + \rho_b}{\epsilon_0} \\ \rho &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho_b}{\epsilon_0} = \frac{-\vec{\nabla} \cdot \vec{P}}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow \epsilon \vec{E} = -\vec{P} \Rightarrow \vec{E} = \frac{-\vec{P}}{\epsilon_0} = \frac{-k r^r}{\epsilon_0}$$

۶- گزینه «۴» صحیح است.

$$\vec{p} = \left( \frac{4\pi}{3} a^r \right) P_0 \hat{z}$$

$$V = \frac{|p| \cos \theta}{4\pi \epsilon_0 r^r} = \frac{\left( \frac{4\pi}{3} a^r \right) P_0 \left( \frac{\sqrt{r}}{2} \right)}{4\pi \epsilon_0 (2a)^r} = \frac{\sqrt{r} P_0 a}{24 \epsilon_0}$$

به کمک روابط دو قطبی‌ها :

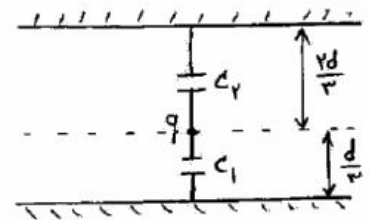
۷- گزینه «۲» صحیح است.

اثبات تمرین ۴-۲۲ کتاب گریفیث

$$E_{in} = \frac{r}{\epsilon_r + 1} E_0 \hat{x} = \frac{r}{\chi_e + r} E_0 \hat{x}$$

۸- گزینه «۱» صحیح است.

$$z = d \text{ بار القایی روی } = -q_r = -q \frac{C_r}{C_1 + C_r} = -q \frac{\frac{1}{\frac{r}{d}}}{\frac{1}{\frac{1}{d}} + \frac{1}{\frac{r}{d}}} = -q \frac{\frac{1}{r}}{\frac{1}{1} + \frac{r}{r}} = -\frac{q}{r}$$



۹- گزینه «۱» صحیح است.

$$\vec{J}_b = \vec{\nabla} \times \vec{M} = \frac{1}{r} \begin{vmatrix} \hat{r} & r\hat{\phi} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & r^r & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r^r) \hat{z} = r^r \hat{z}$$

$$r < a : \oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{in} \Rightarrow (r\pi r) |B| = \mu_0 (r\pi r^r) \Rightarrow |B_{in}| = \mu_0 r^r$$

$$I_{in} = \int \vec{J}_b \cdot d\vec{s}_z = \int (r^r) (r dr d\phi) = r\pi r^r \Big|_0^r = r\pi r^r$$

$$B_{in} = \mu_0 r^r \hat{\phi}$$

۱۰- گزینه «۳» صحیح است.

$$\vec{B} = \frac{r\mu_r}{\mu_r + r} B_0 \hat{z} = \frac{r(1 + \chi_m)}{r + \chi_m} B_0 \hat{z} = \left[ \frac{1 + \chi_m}{1 + \frac{\chi_m}{r}} \right] B_0 \hat{z} = r B_0 \hat{z}$$

۱۱- گزینه «۳» صحیح است.

$$J_s = \rho_s r \omega(-\hat{\phi}) = \sigma a \omega \sin \theta(-\hat{\phi})$$

$$\text{و در } \vec{m} = \left( \frac{4\pi}{3} a^3 \right) (\sigma a \omega) (-\hat{z}) = \frac{4\pi}{3} \sigma \omega a^4 (-\hat{z})$$

$$\text{و در } |\vec{m}| = m \hat{z} \Rightarrow \frac{4\pi}{3} \sigma \omega a^4 = m \Rightarrow \omega = \frac{3m}{4\pi \sigma a^4}$$

۱۲- گزینه «۱» صحیح است.

$$\vec{B} = \mu_0 k_0 \hat{z}$$

$$|F| = q V_0 |B| \sin \varphi = \frac{1}{\gamma} \mu_0 q V_0 k_0$$