مجموعه آزمون‌های ریاضی

مهندسی

barghnews.com

۱- فرض کنید z نقطه‌ای بر دایره واحد $|z|=1$ باشد $\operatorname{Arg}(\frac{1-z}{1+z})$ کدام است؟

1) $\frac{\pi}{4}(z\neq -1)$

2) اگر $\begin{cases} 0 & \operatorname{Re} z>0 \\ \pi & \operatorname{Re} z<0 \end{cases}$

3) $\begin{cases} \frac{\pi}{4} & \text{اگر } \operatorname{Im} z>0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{اگر } \operatorname{Im} z<0 \end{cases}$

4) g

۲ - فرض کنیم $f(z)=f(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y)$ تابع تحلیلی بر حوزه D باشد. برای این‌که u مستقل از y باشد در کدام شرط کافیست صدق کند؟

1) $u(x,y)$ به‌صورت یک چندجمله‌ای از x می‌باشد.

2) $u(x,y)$ تابع مشتق‌پذیر از x می‌باشد.

3) $u(x,y)$ به‌صورت $ax+b$ که a و b ثابت‌اند.

4) چنین $u(x,y)$ وجود ندارد.

۳ - اگر v مزدوج همساز u باشد کدام گزینه درست نیست؟

1) v_y مزدوج همساز u_y است.

2) v_x مزدوج همساز u_x است.

3) u_y مزدوج همساز v_y است.

4) u_x مزدوج همساز $-v_x$ است.

۴ - فرض کنید u بر روی مجموعه باز همبند G هارمونیک باشد و مجموعه $A=\{z\in G \mid u_x(z)=u_y(z)=0\}$ دارای نقطه حدی باشد، کدام گزینه در مورد u درست است؟

1) u بر روی G ثابت است.

2) چون u تحلیلی نیست نمی‌توان ثابت کرد که u ثابت است.

3) فقط در صورتی که u نیز روی A ثابت باشد می‌توان نتیجه گرفت که u ثابت است.

4) حتی در صورتی که u نیز روی A ثابت باشد نمی‌توان نتیجه گرفت که u ثابت است.

barghnews.com

۵ - **تصویر مجموعه** $D=\left\{(x,y)\,|\,1\le x\le 2\,,\,\frac{\pi}{2}\le y\le \pi\right\}$ **تحت نگاشت** e^{z} **کدام است؟**

1) $\left\{re^{i\theta}:1\le r\le 2\,,\,\frac{\pi}{2}\le \theta\le \pi\right\}$

2) $\left\{re^{i\theta}:e\le r\le e^{2}\,,\,\frac{\pi}{2}\le \theta\le \pi\right\}$

3) $\left\{re^{i\theta}:e\le r\le e^{2}\right\}$

4) $\left\{re^{i\theta}:e\le r\le e^{2}\,,\,\circ\le \theta\le 2\pi\right\}$

۶ - **نگاشت** $\omega=\frac{z-1}{z-2}$ **نقاط واقع بر منحنی** $|z+1|=3$ **را بر کدام منحنی می‌نگارد؟**

1) خطی موازی محور مختلط

2) یک دایره که از مبدأ مختصات می‌گذرد.

3) یک دایره که از مبدأ مختصات نمی‌گذرد.

4) خطی که از مبدأ مختصات می‌گذرد.

۷ - **تعیین کنید تبدیل** $f(z)=e^{ia}(\frac{z-z_\circ}{z-\bar{z}_\circ})$ **که در آن** a **عدد حقیقی ثابت و** $\operatorname{Im} z_\circ<\circ$ **است نیم‌صفحه پایینی** $\operatorname{Im} z\le\circ$ **را به کدام‌یک از ناحیه‌های داده شده می‌نگارد؟**

1) $\operatorname{Im} w\le\circ$

2) $\operatorname{Im} w\ge\circ$

3) $|w|\ge 1$

4) $|w|\le 1$

۸ - **اگر تابع** f **در حوزه** D **تحلیلی و غیرثابت باشد آن‌گاه کدام گزینه می‌تواند صحیح باشد؟**

1) به ازای هر z در D مقدار $f(z)$ حقیقی است.

2) $|f(z)|$ می‌نیمم مقدار خود را در D می‌گیرد.

3) $\bar{f}(z)$ بر D تحلیلی است.

4) $|f(z)|$ ماکزیمم مقدار خود را در D می‌گیرد.

barghnews.com

۹ - فرض کنید تابع f روی نیم‌صفحه بالایی $\{z \mid \operatorname{Im} z > \circ\}$ تحلیلی و کراندار باشد و روی محور حقیقی، حقیقی باشد در این‌صورت:

1) $f(z) = a\sin z + b\cos z$ که در آن a و b حقیقی هستند.

2) f ثابت است.

3) $f(z) = \frac{1}{P(z)}$ که در آن $P(z)$ یک چندجمله‌ای با ضرایب حقیقی است که ریشه‌های آن در نیم‌صفحه پایینی است.

4) f خطی است.

۱۰ - فرض کنید u بر روی حوزه (بازهمبند) G هارمونیک باشد و مجموعه $A = \{z \in G : u_x(z) = u_y(z) = \circ\}$ در G دارای نقطه حدی باشد کدام گزینه در مورد u درست است؟

1) u بر روی G ثابت است.

2) چون u تحلیلی نیست نمی‌توان ثابت کرد که u ثابت است.

3) فقط در صورتی که u نیز روی A ثابت باشد می‌توان نتیجه گرفت که u ثابت است.

4) حتی در صورتی که u نیز بر روی A ثابت باشد نمی‌توان نتیجه گرفت که u ثابت است.

۱۱ - اگر f و g توابع تام باشند و g همواره مخالف صفر باشد و همچنین $\forall z : |f(z)| \le |g(z)|$ آن‌گاه:

1) $g(z) \equiv \circ$

2) $\exists k : f(z) = k\,g(z)$

3) $f(z) \equiv \circ$

4) $f(z) \equiv g(z)$

۱۲ - اگر $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$، آن‌گاه بسط لوران f در حوزه $|z| > 2$ حول مبدأ کدام است؟

1) $\sum_{n=\circ}^{\infty} \frac{2^n - 1}{z^{n+1}}$

2) $\sum_{n=\circ}^{\infty} (1 - \frac{1}{2^{n+1}}) z^n$

3) $\sum_{n=\circ}^{\infty} (1 + \frac{1}{2^{n+1}}) z^n$

4) $\sum_{n=\circ}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}} + \sum_{n=\circ}^{\infty} \frac{1}{z^n}$

barghnews.com

۱۳ - بسط لوران $\left(1+(1-\frac{1}{z})^{-1}\right)^{-1}$ حول مبدأ کدام است؟

1) $\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{z^k}$

2) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2^n}\right)z^{-n}$

3) $\sum_{n=0}^{\infty}2^n z^n$

4) $1+\sum_{n=1}^{\infty}2^{n-1}z^n$

۱۴ - اگر $a_0=i$ و برای $n\geq 1$ داشته باشیم $b_n=\frac{i^{2n}}{(2n)!}$ و $a_n=i^{b_n}a_{n-1}$، مقدار $\lim_{n\to\infty}a_n$ کدام است؟ (i^{b_n} را شاخه اصلی در نظر بگیرید)

1) $-i$

2) i

3) $\cos(\cos 1)+i\sin(\cos 1)$

4) $\cos(\frac{\pi}{2}\cos 1)+i\sin(\frac{\pi}{2}\cos 1)$

۱۵ - در بسط لوران مقدار اصلی $(1+z)^{\frac{1}{z}}$ حول ۰، ضریب z^2 برابر است با:

1) ۰

2) 1

3) $\frac{11}{24}e$

4) $\frac{13}{12}e$

۱۶ - مقدار سری $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin nx}{2^n}$ که در آن x عدد حقیقی است برابر است با:

1) $\frac{2\sin x}{5-4\sin x}$

2) $\frac{2\cos x}{5-4\sin x}$

3) $\frac{2\sin x}{5-4\cos x}$

4) $\frac{2\cos x}{5-4\cos x}$

۱۷ - فرض کنید z_0 تکین تنهای تابع f باشد اگر f در ناحیه $0<|z-z_0|<r$ کراندار باشد، آن‌گاه:

1) z_0 یک قطب ساده f است.

2) z_0 یک تکینی برداشتنی است.

3) z_0 یک تکینی اساسی است.

4) چیزی نمی‌توان گفت.

۱۸ - اگر f در z_0 تحلیلی و $g(z)=\frac{f(z)}{z-z_0}$ و $f(z_0)\neq 0$، آن‌گاه:

1) g در z_0 تحلیلی است.

2) z_0 یک نقطه تکین اساسی g است.

3) z_0 یک نقطه تکین برداشتنی g است.

4) z_0 یک قطب ساده g است.

barghnews.com

۱۹ - مقدار انتگرال $\int_{|z|=5} \frac{z^2-2z}{(z+1)^2(z^2+4)} dz$ کدام است؟

1) صفر
2) -1
3) -5
4) $2\pi i$

۲۰ - مقدار $\int_{C_r} \frac{e^z}{(z^2+1)(z-3)} dz$ که در آن C_r دایره‌ای به مرکز مبدأ و شعاع r که $1<r<2$ کدام است؟

1) صفر
2) $\frac{-\pi}{5}(\cos 1+3\sin 1)i$
3) $\frac{\pi}{5}(\cos 1+2\pi e^3)i$
4) $\frac{-\pi}{5}e^3+\frac{\pi e^3}{10}i$

۲۱ - مقدار انتگرال $\int_{C:|z|=1} \frac{z^4+1}{(2z+1)^3} dz$ برابر است با:

1) $\frac{-3\pi i}{8}$
2) $\frac{i\pi}{8}$
3) $\frac{3\pi}{8}$
4) $\frac{3i\pi}{8}$

۲۲ - مانده‌ی $f(z)=e^z \sinh\frac{1}{z}$ حول صفر $z=\circ$ کدام است؟

1) $-\sinh 1$
2) $\sinh 1$
3) $|z|<1$
4) $\sum_{n=\circ}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}$

۲۳ - مقدار $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin ax}{x^2+k^2} dx$ برابر است با:

1) $\pi e^{\frac{-k}{a}}$
2) $\frac{\pi}{a}e^{-k}$
3) $\frac{\pi}{k}e^{-a}$
4) πe^{-ak}

۲۴ - مقدار انتگرال $\int_{|z|=5} \frac{z^2-2z}{(z+1)^2(z^2+4)} dz$ کدام است؟

1) صفر
2) -1
3) -5
4) $2\pi i$

۲۵ - با توجه به سری فوریه تابع $f(x)$ حاصل سری عددی $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\alpha}{n}$ کدام است؟

1) $\frac{\pi-\alpha}{2}$
2) $\frac{\pi}{2}-\alpha$
3) $\frac{\pi+\alpha}{2}$
4) $\frac{\pi}{2}+\alpha$

barghnews.com

۲۶ - در سری فوریه مثلثاتی تابع $f(x)=\begin{cases} x & \circ \le x \le L \\ 2L-x & L < x \le 2L \end{cases}$ یعنی:

$f(x)=\frac{a_\circ}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos\frac{n\pi x}{L}+b_n \sin\frac{n\pi x}{L}\right]$ داریم:

1) $a_n=\circ$ و $n=1,2,3,\cdots$

2) $a_{2k}=\circ$ و $b_n=\circ$ به ازای هر $n\in N$ و هر $k\in N$

3) $b_n=\circ$ و $a_n\neq\circ$ به ازای هر $n\in N$

4) $a_{2k-1}=\circ$ و $b_n=\circ$ به ازای هر $n\in N$

۲۷ - ضریب $\cos\frac{\pi x}{3}$ در بسط فوریه تابع متناوب زیر کدام است؟

$$f(x)=\begin{cases} \circ & -3<x<-1 \\ 1 & -1<x<1 \\ \circ & 1<x<3 \end{cases}$$

1) $\circ$ 2) $\frac{\sqrt{3}}{2\pi}$ 3) $\frac{\sqrt{3}}{\pi}$ 4) $\frac{\sqrt{3}}{\pi^2}$

۲۸ - تابع متناوب $f(x)=x$ و $-\pi<x<\pi$ را به‌صورت سری فوریه بسط می‌دهیم، ضریب $\cos 5x$ کدام است؟

1) $\circ$ 2) $\frac{(-1)^n}{n}$ 3) $\frac{2(-1)^n}{n}$ 4) $\frac{(-1)^{n+1}}{n}$

۲۹ - در بسط سری فوریه تابع $f(x)=\begin{cases} \sin x & -\pi<x<\circ \\ \circ & \circ<x<\pi \end{cases}$ مقدار b_1 کدام است؟

1) $\frac{-1}{2}$ 2) -2 3) $\frac{1}{2}$ 4) 2

۳۰ - در بسط سری فوریه تابع $f(x)=\begin{cases} \sin x & -\pi<x<\circ \\ \cos x & \circ<x<\pi \end{cases}$ مقدار b_1 کدام است؟

1) $\frac{-1}{2}$ 2) -2 3) $\frac{1}{2}$ 4) 2

barghnews.com

۳۱ - جواب دالامبر (D'Alembert) معادله موج $u_u = c^2 u_{xx}$ همراه با شرایط

$u_t(x,\circ) = e^x$ و $u(x,\circ) = e^x$ و $u = (\circ, t) = u(L,t) = \circ$ عبارتست از:

1) $u(x,t) = e^x\left(\cos hct + \frac{1}{c}\sin hct\right)$

2) $u(x,y) = e^x\left(\cos hct + \sin hct\right)$

3) $u(x,t) = e^x\left(\frac{1}{c}\cos hct + \sin hct\right)$

4) $u(x,t) = \frac{e^x}{c}\left(\cos hct + \sin hct\right)$

۳۲ - جواب مسأله مقدار اولیه- کرانه‌ای موج یک بعدی

$$\begin{bmatrix} u_u - u_{xx} = \circ \ , \ \circ < x < L, t > \circ \\ u(x,\circ) = \left|x - \frac{L}{2}\right| \ , \ \circ \le x \le L, u_t(x,\circ) = x(L-x) \\ u(\circ,t) = \circ \ , \ u(L,t) = \circ \ , \ t \ge \circ \end{bmatrix}$$

در نقطه $x = \frac{L}{2}$ و در لحظه $t = \frac{5L}{2}$ برابر است با:

1) $\frac{L}{2}\left(1 + \frac{L^2}{6}\right)$ 2) $L\left(1 - \frac{L^2}{6}\right)$ 3) $L\left(1 + \frac{L^2}{6}\right)$ 4) $\frac{L}{2}\left(1 - \frac{L^2}{6}\right)$

۳۳ - به‌ازای کدام تابع $\Psi(x)$، تغییر متغیر $u(x,t) = w(x,t) + \Psi(x)$، مسأله

$$\begin{cases} u_t = 4u_{xx} + \sin x \\ u(\circ,t) = 1, u_x(\circ,t) = -1 \\ u(x,\circ) = f(x) \end{cases}$$

را به معادله‌ای همگن با شرایط مرزی همگن برحسب w تبدیل خواهیم کرد؟

1) $\Psi(x) = \frac{1}{4}\cos x - \frac{5}{4}x + 1$ 2) $\Psi(x) = -\frac{1}{4}\sin x - \frac{3}{4}x + 1$

3) $\Psi(x) = -\frac{1}{4}\cos x - \frac{3}{4}x + 1$ 4) $\Psi(x) = \frac{1}{4}\sin x - \frac{5}{4}x + 1$

۳۴ - کدام تابع یک جواب معادله $u_{xy} + u_x = \circ$ است؟

1) $(y^2 + \sin x)e^{-y} + x^2$ 2) $(x^2 + \sin y)e^{-x} + y^2$

3) $(y^2 + \sin x)e^{-x} + x^2$ 4) $(x^2 + \sin x)e^{-y} + y^2$

barghnews.com

۳۵ - در حل معادله دیفرانسیل با مشتقات جزیی $\begin{cases} \frac{}{\partial x^2} - \frac{}{\partial t} = \circ \ , & t > \circ \\ u(\circ, t) = \circ \ , \ u_x(L, t) = \circ \\ u(x, \circ) = f(x) \end{cases}$ تابع داده شده $f(x)$

نسبت به کدام مبنای متعامد باید بسط داده شود؟

1) $\cos\frac{\pi x}{2L}, \cos\frac{3\pi x}{2L}, \cdots, \cos\frac{(2k-1)\pi x}{2L}, \cdots$

2) $\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right), \sin\frac{2\pi x}{L}, \cdots, \sin\frac{n\pi x}{2L}, \cdots$

3) $\cos\frac{\pi x}{2L}, \cos\frac{3\pi x}{2L}, \cdots, \cos\frac{(2k-1)\pi x}{L}, \cdots$

4) $\sin\frac{\pi x}{2L}, \sin\frac{3\pi x}{2L}, \cdots, \sin\frac{(2k-1)\pi x}{2L}, \cdots$

۳۶ - جواب معادله موج $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \circ$ با شرایط اولیه زیر کدام است؟

$$u\Big|_{t=\circ} = x^2 \ , \ \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=\circ} = \circ$$

1) $u = x^2 + t^2$

2) $u = x^2 + \sin t$

3) $u = x^2 t^2 + xt$

4) $u = x^2 + \cos t - 1$

۳۷ - جواب $u(x,t)$ معادله گرما $\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} & \circ < x < \pi, t > \circ \\ u_x(\circ, t) = \circ & u(\pi, t) = \circ \\ u(x, \circ) = f(x) \end{cases}$ کدام است؟

1) $u(x,t) = \sum E_n e^{-n^2 t} \sin(nx)$

2) $u(x,t) = \sum E_n e^{\left(n-\frac{1}{2}\right)^2 t} \sin\left(\frac{2n-1}{2}\right)$

3) $u(x,t) = \sum E_n e^{-\left(n-\frac{1}{2}\right)^2 t} \cos\left(\frac{2n-1}{2}\right)x$

4) $u(x,t) = \frac{A_\circ}{2} + \sum E_n e^{-n^2 t} \cos(nx)$

barghnews.com

۳۸ - در حل مسئله مقدار اولیه- کرانه‌ای (یا مرزی) $\begin{cases} u_t \quad u_{xx} = \circ \ , \ \circ < x < L \ , \ t > \circ \\ u(x,\circ) = \phi(x) \ , \ \circ \le x \le L \\ u(L,t) = \circ \ , \ u_x(\circ,t) = \circ \ , \ t \ge \circ \end{cases}$ تابع مفروض و تکه‌ای همواره $\phi(x)$ نسبت به کدام پایه متعامد باید بسط داده شود؟

1) $\cos\frac{K\pi x}{2L} \ , \ \forall K \in N$

2) $\cos\frac{\pi x}{2L}, \cos\frac{3\pi x}{2L}, \cos\frac{5\pi x}{2L}, \cdots, \cos\frac{(2k-1)\pi x}{2L}, \cdots$

3) $\sin\frac{\pi x}{2L}, \sin\frac{3\pi x}{2L}, \sin\frac{5\pi x}{2L}, \cdots, \sin\frac{(2k-1)\pi x}{2L}, \cdots$

4) $\cos\frac{\pi x}{L} \ , \ \cos\frac{2\pi x}{L} \ , \cos\frac{3\pi x}{L} \ , \ \cdots \ , \ \cos\frac{n\pi x}{L} \ , \ \cdots$

۳۹ - در معادله لاپلاس قطبی $u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{oo} = \circ$ جواب $u(r,\theta)$ درون تا بیرون دایره $r = a$ به‌صورت $u(r,\theta) = A(r)B(\theta)$ نوشته می‌شود در این‌صورت

1) درون دایره $r = a$ تابع $A(r)$ شامل r^n تابع $B(\theta)$ شامل $\cos\theta$ و $\sin\theta$ است.

2) درون دایره $r = a$ تابع $A(r)$ شامل r^{-n} و تابع شامل $\cos\theta$ و $\sin\theta$ است.

3) بیرون دایره $r = a$ تابع $A(r)$ شامل r^n و $\ln r$ تابع شامل θ است.

4) بیرون دایره $r = a$ تابع $A(r)$ شامل r^{-n} و $\ln r$ تابع شامل θ است.

۴۰ - اگر در میله‌ای به طول $L = 1m$ توزیع ابتدایی دما به‌صورت $T = (x,\circ) = 100\sin(\pi x)$ باشد و توزیع دمایی این میله در فرمول $\pi^2\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ صدق کند و داشته باشیم $T(\circ,t) = \circ$ و $T(1,t) = \circ$ و آن‌گاه مقدار $T(0/5,2)$ تقریباً کدام است؟

1) $\circ$ 2) $1/832$ 3) $13/534$ 4) $36/788$

۴۱ - جواب معادله لاپلاس $u_{xx} + u_{yy} = \circ$ درون دایره قطبی $r = a$ با شرط مرزی $u(a,\theta) = \sin 5\theta$ کدام است؟

1) $\left(\frac{a}{r}\right)^5 \cos 5\theta$ 2) $\left(\frac{r}{a}\right)^5 \cos 5\theta$ 3) $\left(\frac{r}{a}\right)^5 \sin 5\theta$ 4) $\left(\frac{a}{r}\right)^5 \sin 5\theta$

barghnews.com

۴۲ - اگر $\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\circ & , \quad x^2+y^2<4 \\ u(x,y)=x^2y^2 & , \quad x^2+y^2=4 \end{cases}$ و با توجه به آن‌که یک تابع همساز مقادیر ماکزیمم و مینیمم خود را روی مرز ناحیه‌ها اتخاذ می‌کند آن‌گاه مقادیر ماکزیمم و مینیمم $u(x,y)$ در ناحیه فوق برابرند با:

(کامپیوتر - ۷۴)

1) $u_{max}=4\,,\,u_{min}=1$

2) $u_{max}=4\,,\,u_{min}=\circ$

3) $u_{max}=2\ ,\ u_{min}=\circ$

4) $u_{max}=2\ ,\ u_{min}=1$

۴۳ - جواب مسأله مقدار کرانه‌ای

$$\begin{cases} u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\circ\circ}=\circ\ ,\ 1<r<e\ ,\ \circ\le\theta\le 2\pi \\ u(1,\theta)=C_1 \qquad C_1\in R \\ u(e,\theta)=2C_1 \end{cases}$$

کدام است؟

1) $u=C_1\ln r+C_1$

2) $u=\frac{C_1}{e-1}r+\frac{e-2}{e-1}C_1$

3) $u=C_1(2-e)\ln r+C_1$

4) $u=\frac{(2-e)C_1}{e^2-e}r+\frac{(2-e^2)C_2}{e-e^2}$

۴۴ - پاسخ معادله لاپلاس $u(r,\theta)$ را در مختصات قطبی در ناحیه‌ای دایره‌ای در نظر می‌گیریم:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial\theta^2}=\circ$$

شرط مرزی روی محیط دایره‌ای به شعاع a عبارتست از: $u(a,\theta)=f(\theta)=\begin{cases} 2\theta & \circ<\theta<\pi \\ \circ & \pi<\theta<2\pi \end{cases}$ مقدار u در مرکز دایره برابر است با:

1) π

2) $\frac{\pi}{2}$

3) $\frac{\pi}{4}$

4) $\frac{\pi}{8}$

barghnews.com

۴۵ - فرض کنید $g(t)$ و $t \geq \circ$ تابع مفروض و دارای تبدیل لاپلاس $G(s)$ باشد و $\begin{cases} u_t - u_{xx} = g(t) & t > \circ \ , \ > \circ \\ u(x,\circ) = \circ \ , \ u(\circ,t) = \circ \end{cases}$ اگر $U(x,s)$ تبدیل لاپلاس جواب کراندار مسأله باشد آن‌گاه $U(x,s)$ برابر است با:

1) $G(s)(1-e^{-x\sqrt{s}})$

2) $G(s)+A(s)e^{-x\sqrt{s}}$ که در آن $A(s)$ تابع دلخواه است.

3) $\frac{1}{s}G(s)(1-e^{-x\sqrt{s}})$

4) $\frac{1}{s}G(s)+A(s)e^{-x\sqrt{s}}$

۴۶ - اگر معادله دیفرانسیل $u_{tt} - u_{xx} = \delta\left(t - \frac{x}{a}\right)$ به همراه شرایط اولیه $u_t(x,\circ) = \circ$ و $u(x,\circ) = \circ$ داده شده باشد آن‌گاه تبدیل لاپلاس جواب (یا جواب‌ها) در حالت کدام است؟

1) $U(x,s) = c_1e^{-sx} + c_2e^{sx} + \frac{1}{s^2(1-a^2)}e^{-\frac{x}{a}s}$

2) $U(x,s) = c_1e^{-sx} + c_2e^{sx} + \frac{1}{s^2(1-\frac{1}{a^2})}e^{-\frac{x}{a}s}$

3) $U(x,s) = c_1e^{-sx} + c_2e^{sx} + \frac{1}{s^2(1-\frac{1}{a^2})}e^{\frac{x}{a}s}$

4) $U(x,s) = c_1e^{-sx} + c_2e^{sx} + \frac{1}{s^2(a^2-1)}e^{-\frac{x}{a}s}$

۴۷ - تبدیل فوریه تابع $f(x) = \begin{cases} e^{a^2ix} & -1 < x < 1 \\ \circ & \text{برای سایر مقادیر} \end{cases}$ عبارت است از:

1) $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\cos(a^2+w)}{a^2+w}$

2) $\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos(a^2+w)}{a^2+w}$

3) $\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(a^2-w)}{a^2-w}$

4) $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin(a^2-w)}{a^2-w}$

barghnews.com

۴۸ - تبدیل فوریه تابع $f(t)=\frac{1}{1+t^2}$ کدام است؟ (در صورتی که $f(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt$ را تبدیل فوریه $f(t)$ تعریف کنیم)

1) $f(\omega)=e^{-|\omega|}$

2) $f(\omega)=\pi e^{-|\omega|}$

3) $f(\omega)=\frac{1}{1+i\omega}$

4) $f(\omega)=\frac{\pi}{1+i\omega}$

۴۹ - با توجه به تبدیل انتگرال فوریه، حاصل $\int_{\circ}^{\infty}\frac{\cos\alpha x}{\alpha^2+1}dx$ وقتی $x\geq\circ$ می‌باشد، کدام است؟

1) $\frac{2}{\pi}e^{-x}$

2) $\frac{\pi}{2}e^{-x}$

3) $\frac{\pi}{2}e^{x}$

4) $\frac{\pi}{2}e^{2x}$

۵۰ - با استفاده از تبدیلات فوریه جواب معادله انتگرالی $\int_{\circ}^{\infty} f(x)\cos\lambda x\,dx=\frac{1}{1+\lambda^2}$ عبارت است از:

1) $f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{\circ}^{\infty}\frac{1}{1+\lambda^2}\sin\lambda x\,d\lambda$

2) $f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{\circ}^{\infty}\frac{1}{1+\lambda^2}\cos\lambda x\,d\lambda$

3) $f(x)=\frac{2}{\pi}\int_{\circ}^{\infty}\frac{1}{1+\lambda^2}\sin\lambda x\,d\lambda$

4) $f(x)=\frac{2}{\pi}\int_{\circ}^{\infty}\frac{1}{1+\lambda^2}\cos\lambda x\,d\lambda$

۵۱ - با استفاده از تبدیل سینوسی فوریه برای تابع $f(x)=e^{-x}$ که در آن $x\geq\circ$ می‌باشد، مقدار انتگرال $\int_{\circ}^{\infty}\frac{x\sin mx}{1+x^2}dx$ و $m>\circ$ کدام است؟

1) $\frac{\pi}{4}e^{-m}$

2) $\frac{\pi}{2}e^{-m}$

3) $\frac{-\pi}{4}e^{-m}$

4) $\frac{-\pi}{2}e^{-m}$

۵۲ - تبدیل فوریه تابع $e^{-|x|}$ برابر است با:

1) $\frac{2}{1+\omega^2}$

2) $\frac{1}{1+\omega^2}$

3) $\frac{2}{4+\omega^2}$

4) $\frac{1}{4+\omega^2}$

۵۳ - تبدیل فوریه کسینوسی تابع $f(x)=e^{-x}$ برای $x\geq\circ$ عبارتست از:

1) $f_c=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\omega}{\omega^2+1}$

2) $f_c=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\omega^2+1}$

3) $f_c=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\omega^2-1}$

4) $f_c=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\omega}{\omega^2-1}$

barghnews.com

۵۴ - اگر f تابعی فرد و به ازاء xهای نامنفی $f(x)=\begin{cases}\sin x & \circ \le x \le \pi \\ \circ & x \ge \pi\end{cases}$ آن‌گاه تبدیل فوریه آن $\hat{f}(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx$ با کدام گزینه برابر است؟

1) $\frac{2\sin \pi\omega}{\omega^2-1}$ 2) $\frac{2i\sin \pi\omega}{\omega^2-1}$ 3) $\frac{2\sin \pi\omega}{1-\omega^2}$ 4) $\frac{2i\sin \pi\omega}{1-\omega^2}$

۵۵ - حاصل انتگرال $I=\int_{\circ}^{\infty}\frac{w\sin wx}{1+w^2}dw$ کدام است؟

1) $\frac{e^{-x}}{\pi}$ 2) $\frac{\pi e^{-x}}{2}$ 3) πe^{-x} 4) واگراست

۵۶ - حاصل $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{xe^{ix}}{x^2+1}dx$ کدام است؟

1) πie 2) $2\pi ie^{-1}$ 3) πie^{-1} 4) $\frac{i}{2}\pi e$

۵۷ - مقدار انتگرال $\int_{|z|=1}\frac{\cos z}{z^{2n+1}}dz$ (دایره مرز در جهت مثلثاتی) کدام است؟

1) $2\pi i$ 2) $2\pi i(-1)^n$ 3) $\frac{2\pi i(-1)^n}{n!}$ 4) $\frac{2\pi i(-1)^n}{(2n)!}$

۵۸ - $\int_{|z|=1}|z||dz|$ حاصل کدام است؟

1) 2π 2) 3π 3) $-\pi$ 4) 4π

۵۹ - حاصل $I=\int_C(\overline{z})^2dz$ روی مسیر $y=\frac{x}{3}$ که $z=\circ$ را به $z=3+i$ وصل می‌کند، کدام است؟

1) $I=\circ$ 2) $I=1+\frac{10i}{3}$

3) $I=10\left(1-\frac{1}{3}i\right)$ 4) $I=10\left(1+\frac{1}{3}i\right)$

۶۰ - فاصله همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z+i)^n}{2^{2n}}$ کدام است؟

1) $|z+i|<2$ 2) $|z+i|\le 2$ 3) $|z+i|<4$ 4) $|z+i|\le 4$

barghnews.com

۶۱ - **شعاع همگرایی سری** $\sum_{n=\circ}\frac{(2n)!}{(n!)^2}z^n$ **برابر است با:**

1) 2 2) $\frac{1}{2}$ 3) $\frac{1}{4}$ 4) 4

۶۲ - **هرگاه** $w=f(z)$ **بر روی دایره** $|z|\le 1$ **تحلیلی باشد، آن‌گاه** $|f(z)|$ **مقدار ماکزیمم خود را ...**

1) در نقطه $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$ می‌گیرد.

2) در روی مبدأ مختصات می‌گیرد.

3) روی دایره و مینیمم خود را در مبدأ می‌گیرد.

4) در روی $|z|=1$ می‌گیرد.

۶۳ - **اگر** n **یک عدد طبیعی فرد باشد، معادله** $x^n+xn+1=\circ$ **دارای**

1) دقیقاً یک ریشه است. 2) حداکثر یک ریشه است.

3) یک ریشه مکرر است. 4) n ریشه است.

۶۴ - **اگر تابع** f **در حوزه** D **تحلیلی و غیرثابت باشد، آن‌گاه کدام گزاره می‌تواند صحیح باشد؟**

1) به ازای هر z در D مقدار $f(z)$ حقیقی است.

2) $|f(z)|$ مینیمم مقدار خود را در مرز D می‌گیرد.

3) $\overline{f(z)}$ بر D تحلیلی است.

4) $|f(z)|$ ماکسیمم مقدار خود را در مرز D می‌گیرد.

۶۵ - **یک مزدوج همساز تابع** $u(x,y)=3x^2y+2x^2-y^3-2y^2$ **کدام است؟**

1) $4xy-x^3+3xy^2$ 2) $-4xy-x^3+3xy^2$

3) $4xy+x^3-3xy^2$ 4) $-4xy+x^3-3xy^2$

۶۶ - **به ازاء چه مقادیری از** a **و** b **تابع** $u(x,y)=ax^3+bxy$ **همساز است؟**

1) $b=\circ, a=\circ$ 2) $b,a=\circ$ هر عددی

3) a هر عددی $b=\circ$ 4) a و b هر عدد غیرصفر

barghnews.com

۶۷ - در چه صورتی چندجمله‌ای زیر هارمونیک است؟

$(P = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dyz + Ez^2 + Fxz$

1) $E = -(A+B)$ 2) $E = -(A+C)$

3) $E = A+B$ 4) $E = A+c$

۶۸ - تابع $f(r,\theta) = r^2\cos^2\theta - r^2\sin^2\theta$

1) هارمونیک نیست.

2) فقط در ناحیه $\circ < r < 1$ هارمونیک است.

3) فقط در ناحیه $\circ < \theta < \pi$ هارمونیک است.

4) هارمونیک است.

۶۹ - اگر α، β **و** γ **اعداد مختلط با قدرمطلق واحد باشند به قسمتی که** $|\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma| = |\alpha\beta\gamma|$، **مقدار** $|\alpha+\beta+\gamma|$ **کدام است؟**

1) $\frac{1}{2}$ 2) $\frac{2}{3}$ 3) 1 4) 2

۷۰ - فرض کنید $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$، $w \neq \circ$ **یک عدد مختلط و** V **همسایگی صفر باشد. در این‌صورت معادله** $f(z) = w$ **به‌ازای هر** w:

1) و هر v فقط یک جواب در V دارد.

2) و هر v تعداد نامتناهی در V جواب دارد.

3) و هر v هیچ جوابی در V ندارد.

4) یک v یافت می‌شود که در V فقط یک جواب دارد.

۷۱ - مکان هندسی نقاطی که $|z - ni| = |z + ni|$ (n **عدد ثابت) عبارتست از:**

1) مبدأ مختصات 2) محور حقیقی 3) محور موهومی 4) هیچ‌کدام

۷۲ - اگر $z = x + iy$ **عدد مختلط باشد، آن‌گاه مجموع مقادیر حقیقی و موهومی عدد** z **برابر ..... است.**

1) حداکثر $\sqrt{3}|z|$ 2) حداقل $\sqrt{3}|z|$ 3) حداقل $\sqrt{2}|z|$ 4) حداکثر $\sqrt{2}|z|$

barghnews.com

۷۳ - نامساوی مثلثی برای دو عدد مختلط غیرصفر z_1 و z_2 با چه شرایطی به تساوی منجر می‌شود؟

1) $\mathrm{Re}(\bar{z}_1 z_2)=1$

2) $\mathrm{Im}(\bar{z}_1 z_2)=|z_1||z_2|$

3) $\mathrm{Re}(\bar{z}_1 z_2)=|z_1||z_2|$

4) $\theta_1-\theta_2=2k\pi$

۷۴ - مکان هندسی نقاط مختلط واقع بر رابطه $\left|\frac{z+1}{z-1}\right|=4$ عبارتست از:

1) دایره‌ای به مرکز $z_\circ=\frac{17}{15}$ و شعاع $\frac{8}{15}$

2) دایره‌ای به مرکز $z_\circ=\frac{1}{15}$ و شعاع $\frac{8}{15}$

3) خط راست گذرنده از $z_\circ=\frac{17}{15}+i$

4) خط راست گذرنده از $z_\circ=\frac{8}{5}-i$

۷۵ - حد تابع $f(z)=z-e^z$ وقتی که z به بی‌نهایت میل کند کدام است؟

1) $-\infty$

2) $\circ$

3) وجود ندارد.

4) ∞

۷۶ - هرگاه $f(z)$ یک تابع تحلیلی باشد، آن‌گاه مقدار A در تساوی

$(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2})|f(z)|^2=A|f'(z)|^2$ برابر است با:

1) $A=2$

2) $A=1$

3) $A=4$

4) $A=9$

۷۷ - حاصل حد $\lim\limits_{h\to\circ}\frac{f(z-nih)-f(z)}{h}$ برابر است با:

1) nf_x

2) nf_y

3) nf_{xy}

4) $n(f_x+f_y)$

۷۸ - تابع $f(x+iy)=x^2+2xyi$ ..... مشتق دارد.

1) فقط در مبدأ

2) در محور حقیقی

3) در محور موهومی

4) نیمساز ناحیه دوم

۷۹ - حاصل حد $\lim\limits_{z\to1}\frac{7z^5-4z^4+5z^2-6z-2}{z-1}$ در میدان اعداد مختلط برابر است با:

1) 19

2) 23

3) 11

4) 17

barghnews.com

۸۰ - **نگاشت** $w=\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z})$ **دایره** $|z|=2$ **را بر کدام یک از منحنی‌های زیر می‌نگارد؟**

1) دایره‌ای به شعاع $\frac{1}{2}$

2) یک بیضی که قطر آن موازی محورها نیست.

3) یک بیضی که قطر کوچک آن موازی محور حقیقی است.

4) یک بیضی که قطر بزرگ آن موازی محور حقیقی است.

۸۱ - **نسبت ناهمساز ۳ نقطه** z_1، z_2 **و** z_3 **در چه شرایطی مقدار حقیقی دارد؟**

1) زمانی که 3 نقطه روی دایره واحد قرار گیرند.

2) زمانی که 3 نقطه بیرون دایره واحد قرار گیرند.

3) زمانی که 3 نقطه درون دایره واحد قرار گیرند.

4) زمانی که 3 نقطه روی یک خط راست قرار گیرند.

۸۲ - **جواب معادله مختلط** $\log z=\pi i$ **کدام گزینه است؟**

1) $e^{\pi(1+2k)i}$ 2) $e^{\pi(1-2k)i}$ 3) $e^{\frac{\pi(1+k)i}{2}}$ 4) $e^{\frac{\pi(1-k)i}{2}}$

۸۳ - **نگاشت ناحیه** $0<\theta<\frac{\pi}{4}$ **تحت تبدیل** $\omega=\frac{-i}{z^2}$ **عبارت است از:**

1) 2) 3) 4)

۸۴ - **تبدیل ناحیه بین دو دایره** $|z-1|=1$ **و** $|z-i|=1$ **توسط تابع** $\omega=\frac{1}{z}$ **عبارت است از:**

1) $v>\frac{1}{2}, u>\frac{1}{2}$ 2) $v<\frac{-1}{2}, u>\frac{1}{2}$

3) $v<\frac{-1}{2}, u<\frac{1}{2}$ 4) $v>\frac{-1}{2}, u<\frac{1}{2}$

۸۵ - **فرض کنید** h **تابع تحلیلی بر مجموعه** $\{z \mid |z|\le 1\}$ **باشد و به‌ازای هر** z **در این مجموعه** $|h(z)|<1$. **در صورتی که** $D=\{z \mid |z|<1\}$ **کدام گزینه صحیح است؟**

1) h در D دو نقطه ثابت دارد.

2) h در D نقطه ثابت ندارد.

barghnews.com

3) در مورد تعداد نقاط ثابت h در D در حالت کلی نمی‌توان نتیجه‌گیری کرد.

4) h در D فقط یک نقطه ثابت دارد.

۸۶ - اگر C دایره‌ی $|z|=\frac{1}{2}$ در جهت مثبت باشد، آن‌گاه مقدار $\int_C \frac{e^z}{z^3(z^2+1)}dz$ برابر است با:

1) $-2\pi i$ 2) $-\pi i$ 3) صفر 4) $2\pi i$

۸۷ - انتگرال $\int_C e^{\bar{z}}dz$ که C مرز مربع واحد در ناحیه اول دستگاه مختصات دکارتی است برابر است با:

1) $e^{-i}(1-e)$ 2) $e^{-i}(1-e)-e$

3) $e^{-i}(1-e)+e$ 4) $e^{-i}(1-e)+1$

۸۸ - انتگرال $\int_{-\pi}^{\pi} e^{a\cos x}\cos(a\sin x)dx$ برابر است با ..... (a ثابت حقیقی)

1) π 2) 2π 3) $\frac{\pi}{2}$ 4) $\circ$

۸۹ - سری $\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+z}}$ که در آن z یک عدد مختلط است.

1) به ازای هر عدد موهومی محض z همگراست.

2) به ازای هر عدد موهومی محض z واگراست.

3) به ازای هر عدد حقیقی z همگراست.

4) به ازای هر عدد حقیقی z واگراست.

۹۰ - مقدار ثابت در بسط لوران $f(z)=\frac{1}{\sin hz}$ کدام گزینه است؟

1) 2 2) 1 3) $\circ$ 4) -1

۹۱ - سه جمله بسط تیلور تابع $f(z)=Ln(1+z)$ با $|z|<1$ عبارتست از:

1) $1+z+z^2$ 2) $z+\frac{z^2}{2}+\frac{z^5}{5}$ 3) $z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}$ 4) $z-\frac{z^3}{3}+\frac{z^5}{5}$

۹۲ - چند ریشه از ریشه‌های معادله $2z^5-3z^3+z+8$ در مجموعه $1<|z|<2$ قرار دارد؟

1) 1 ریشه 2) 3 ریشه 3) 4 ریشه 4) 5 ریشه

barghnews.com

۹۳ - انتگرال $\int_{|z|=1}\frac{dz}{|z-a|^2}$ که در آن $a\in\mathbb{C}$ و $|a|<1$ برابر است با:

1) ∘

2) $\frac{2\pi}{1-|a|^2}$

3) 1

4) $2\pi|a|$

۹۴ - مقدار انتگرال $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\,dx}{1+x^6}$ را به‌دست آورید:

1) $\frac{\pi}{3}$

2) $\frac{-\pi}{3}$

3) $\frac{2\pi}{3}$

4) ∘

barghnews.com

پاسخنامه

۱- گزینه‌ی «۴» صحیح است.

$$|z|=1 \Rightarrow z=e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$$

$$A=\frac{1-z}{1+z}=\frac{1-e^{i\theta}}{1+e^{i\theta}}=\frac{(1-\cos\theta)-i\sin\theta}{(+\cos\theta)+i\sin\theta}=\frac{(1-\cos\theta)-i\sin\theta}{(1+\cos\theta)+i\sin\theta}\times\frac{(1+\cos\theta)-i\sin\theta}{(1+\cos\theta)-i\sin\theta}$$

$$\Rightarrow A=\frac{(1-\cos^2\theta)-\sin^2\theta-2i\sin\theta}{(1+\cos\theta)^2+\sin^2\theta}=\frac{-2(\sin\theta)i}{2+2\cos\theta}=\frac{-i\sin\theta}{(1+\cos\theta)=2\cos^2\frac{\theta}{2}}$$

بنابراین

$A=X+iY$ که در آن داریم:

$$X=\circ$$

$$Y=\frac{-\sin\theta}{(1+\cos\theta)=2\cos^2\frac{\theta}{2}}$$

و

$$\mathrm{Tan}\varphi=\frac{-\sin\theta}{(1+\cos\theta)\times\circ} \Rightarrow \varphi=\mathrm{Arg}(A)=\begin{cases}\frac{\pi}{2} & \sin\theta<\circ\\ -\frac{\pi}{2} & \sin\theta>\circ\end{cases}$$

از آن‌جا که $\sin\theta=\mathrm{Im}(z)$ لذا گزینه‌ی «4» صحیح است.

۲- گزینه‌ی «۳» صحیح است.

$f(z)=u+iv$ تحلیلی $f \Rightarrow$ در شرط کشی- ریمان صدق می‌کند f $\begin{cases}u_x=v_y\\ u_y=-v_x\end{cases}$

u مستقل از y است لذا $u_y=-v_x=\circ$ و $\begin{cases}u=f_1(x)+c_1\\ v=f_2(y)+c_2\end{cases}$

از طرفی $u_x=v_y$ پس:

$$\begin{cases}u_x=f_1'(x)=c\\ v_y=f_2'(y)=c\end{cases}$$

$$\Rightarrow u=cx+c_3 \quad \text{و} \quad v=cy+c_4$$

barghnews.com

۳- گزینه‌ی «۳» صحیح است.

$$\begin{cases} U = u_y \\ V = v_y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U_x = u_{xy} = v_{yy} = V_y \\ U_y = u_{yy} = -v_{xy} = -V_x \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} U_{xx} + U_{yy} = \circ \\ V_{xx} + V_{yy} = \circ \end{matrix}$$

V و U در معادلات لاپلاس صدق می‌کنند.

گزینه‌های 1) و 2) و 4) برقرارند فقط گزینه «3» صحیح نیست.

۴- گزینه‌ی «۱» صحیح است.

u در G همساز است لذا $u_{xx} + u_{yy} = \circ$ از طرفی u در A دارای نقاطی است که $\begin{cases} u_x = \circ \\ u_y = \circ \end{cases}$ لذا u باید ثابت باشد. زیرا در همسایگی‌های A نیز u ثابت است چون A نقطه حدی دارد.

$$\begin{cases} u_x = \circ \Rightarrow u(x,y) = \phi_1(y) \Rightarrow u_y = \phi_1'(y) = \circ \\ u_y = \circ \Rightarrow u(x,y) = \phi_2(x) \Rightarrow u_x = \phi_2'(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \phi_1(y) = c_1 \\ \phi_2(y) = c_2 \end{matrix}$$

۵- گزینه‌ی «۲» صحیح است.

$$f(z) = e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y) = re^{i\theta}$$

$$\begin{cases} r = e^x \quad 1 \le x \le 2 \Rightarrow e \le r \le e^2 \\ \theta = y \quad \dfrac{\pi}{2} \le y \le \pi \Rightarrow \dfrac{\pi}{2} \le \theta \le \pi \end{cases}$$

۶- گزینه‌ی «۱» صحیح است.

$$z+1=3e^{i\theta} \Rightarrow z=3e^{i\theta}-1,\ \omega = \frac{z-1}{z-2} = \frac{z-2+1}{z-2} = 1+\frac{1}{z-2}$$

$$\omega = 1+\frac{1}{3e^{i\theta}-1-2} = 1+\frac{1}{3(e^{i\theta}-1)} = 1+\frac{1}{3(\cos\theta + i\sin\theta - 1)}$$

$$\frac{1}{(\cos\theta-1)+i\sin\theta} = \frac{(\cos\theta-1)-i\sin\theta}{(\cos\theta-1)^2+\sin^2\theta} = \frac{(\cos\theta-1)-i\sin\theta}{\underbrace{\cos^2\theta-2\cos\theta+1+\sin^2\theta}_{1}}$$

$$= \frac{(\cos\theta-1)-i\sin\theta}{2(1-\cos\theta)} = \frac{-1}{2} - \frac{i\sin\theta}{2(1-\cos\theta)}$$

$$\omega = 1+\frac{1}{3(\cos\theta-1+i\sin\theta)} = 1+\frac{1}{3}\left\{\frac{-1}{2} - \frac{i\sin\theta}{2(1-\cos\theta)}\right\}$$

barghnews.com

$$\omega = 1 - \frac{1}{6} - \frac{i\sin\theta}{3\times 2(1-\cos\theta)} = \frac{5}{6} - \frac{i\sin\theta}{6(1-\cos\theta)} = u + iv$$

معادله خط به‌صورت $u = \frac{5}{6}$ است.

۷- گزینه‌ی «۴» صحیح است.

$$z = x + iy\,,\ f(z) = w = e^{ia}\left(\frac{z - z_\circ}{z - \overline{z}_\circ}\right) \Rightarrow f(z_\circ) = \circ\ ,\ f(\overline{z}_\circ) = \infty$$

$$z = \circ \Rightarrow |w| = |f(\circ)| = \left|e^{ia}\left(\frac{\circ - z_\circ}{\circ - z_\circ}\right)\right| = 1 \Rightarrow |w| = 1$$

$\overline{z}_\circ$ قرینه $z_\circ$ نسبت به محور حقیقی نسبت به تبدیل به بی‌نهایت تبدیل می‌شود. در واقع چون دایره را حفظ می‌کند لذا $|w| \le 1$ تبدیل مورد نظر است.

۸- گزینه‌ی «۲» صحیح است.

برای تابع تحلیلی f هر یک از گزینه‌های 1 و 3 برقرار باشد آن‌گاه تابع f ثابت خواهد شد که در این‌جا طبق فرض f غیرثابت است. از طرفی می‌دانیم که تابع f تحلیلی و غیرثابت در هیچ نقطه از حوزه تعریف خود ماکزیمم مقدار را به خود نمی‌گیرد. بنابراین گزینه «2» صحیح است.

۹- گزینه‌ی «۲» صحیح است.

چون f در این حوزه $(\{z \mid \operatorname{Im} z > \circ\})$ تحلیلی است لذا طبق معادلات کوشی- ریمان داریم:

$$\left.\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases} \begin{matrix} ,|f(z)| \le M \\ \text{کرانــدار } f \end{matrix}\right\} \Rightarrow \quad \text{ثابت } f(z) = c$$

حالا می‌توان نوشت $|f(z)| = m$ که $m \le M$ است بنابراین $|f(z)|^2 = u^2 + v^2 = m^2$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2uu_x + 2vv_x = \circ \\ 2uu_y + 2vv_y = \circ \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} u \\ v \end{matrix}\begin{cases} uu_x + vv_x = \circ \\ -uv_x + vu_x = \circ \end{cases} \Rightarrow (u^2 + v^2)u_x = \circ \Rightarrow \begin{cases} u_x = \circ \\ v_x = \circ \end{cases}$$

$v = c_2$ و $u = c_1$ لذا $f(z) = u + iv$ ثابت خواهد بود. از طرفی طبق اصل بازتاب چون $f(\overline{z}) = \overline{f(z)} = \overline{C}$ و $\overline{z} \in \{z \mid \operatorname{Im}(z) > \circ\}$ است. لذا $f(z) = C$ برای کل صفحه مختلط برقرار است.

barghnews.com

۱۰- گزینه‌ی «۱» صحیح است.

u طبق تعریف همساز است. یعنی $u_{xx}+u_{yy}=\circ$. از طرفی با توجه به فرض G دارای نقاطی است که $\begin{cases} u_x=\circ \\ u_y=\circ \end{cases}$

بنابراین باید u مقدار ثابت باشد.

$$u_x=\circ \Rightarrow u(x,y)=f_1(y) \Rightarrow u_y=\circ \Rightarrow f_1'(y)=\circ \Rightarrow f_1(y)=C_1$$

$$u_y=\circ \Rightarrow u(x,y)=f_2(x) \Rightarrow u_x=\circ \Rightarrow f_2'(y)=\circ \Rightarrow f_2(y)=C_2$$

چون A در G دارای نقطه حدی است لذا دنباله‌ای از اعداد وجود دارد که u در آن‌ها مقدار ثابت است. لذا u می‌تواند در تمام نقاط G ثابت باشد.

۱۱- گزینه‌ی «۲» صحیح است.

تعریف می‌کنیم: $h(z)=\dfrac{f(z)}{g(z)}$، توابع f و g تحلیلی و تام‌اند $(g(z)\neq\circ)$ پس تابع h تام است.

$$g(z)\neq\circ \xrightarrow[\text{طبق قضیه لیوویل}]{} |h(z)|=\frac{|f(z)|}{|g(z)|}\leq 1 \text{ چون } \Rightarrow h(z)=C \text{ ثابت}$$

لذا h تابع ثابت است.

در نتیجه: $h(z)=\dfrac{f(z)}{g(z)}=C$ و $f(z)=Cg(z)$.

۱۲- گزینه‌ی «۱» صحیح است.

می‌توان $f(z)$ را به‌صورت جمع یا تفریق دو کسر نوشت:

$$f(z)=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}$$

در حوزه $|z|>2$ و $|z|>1$ نیز برقرار است.

$$f(z)=\frac{1}{z(1-\frac{2}{z})}-\frac{1}{z(1-\frac{1}{z})}$$

پس: $\dfrac{2}{|z|}<1$ و $\dfrac{1}{|z|}<1$

barghnews.com

در حوزه‌ی $|z|>2$ داریم:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{z(1-\frac{2}{z})}=\dfrac{1}{z}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(\dfrac{2}{z})^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{2^n}{z^{n+1}} \\ \dfrac{1}{z(1-\frac{1}{z})}=\dfrac{1}{z}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(\dfrac{1}{z})^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{z^{n+1}} \end{cases}$$

از آن‌جا که $f(z)=\dfrac{1}{z(1-\frac{2}{z})}-\dfrac{1}{z(1-\frac{1}{z})}$ داریم:

$$\Rightarrow f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n-1}{z^{n+1}}$$

۱۳- گزینه‌ی «۴» صحیح است.

$$1+\left(1-\frac{1}{z}\right)^{-1}=\left(1+\frac{z-1}{z}\right)^{-1}=1+\frac{z}{z-1}=\frac{2z-1}{z-1}$$

$$f(z)=\left(\frac{2z-1}{z-1}\right)^{-1}=\frac{z-1}{2z-1}=\frac{z-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}{2z-1}=\frac{1}{2}-\frac{\frac{1}{2}}{2z-1}=\frac{1}{2}+\frac{\frac{1}{2}}{1-2z}$$

در حوزه‌ی $|z|<\frac{1}{2}$ داریم: $0<|2z|<1$ و سری همگرای $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(2z)^n$ به $\dfrac{1}{1-2z}$ خواهیم داشت:

$$f(z)=\frac{1}{2}+\frac{\frac{1}{2}}{1-2z}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(2z)^n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}(2z)^n+(2z)^0\right)$$

$$\Rightarrow\ f(z)=1+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(2z)^n=1+\sum_{n=1}^{\infty}2^{n-1}z^n$$

۱۴- گزینه‌ی «۴» صحیح است.

$$\begin{matrix} a_n=i^{b_n}a_{n-1} \\ a_{n-1}=i^{b_{n-1}}a_{n-2} \end{matrix}\ \Rightarrow \text{با ادامه روند}\ a_n=i^{b_n}\cdot i^{b_{n-1}}\cdots i^{b_1}a_0\ ,\ b_n=\frac{(-1)^n}{(2n)!}$$

$$\Rightarrow\ a_n=i^{(1+b_1+b_2+\cdots+b_n)}=i^{\left(\sum\limits_{k=0}^{n}b_k\right)},\ a_0=i$$

می‌دانیم: $\cos z=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n z^n}{(2n)!}$ (در حول مبدأ)

$$\Rightarrow\ \lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}i^{\sum\limits_{k=0}^{n}b_k}=i^{\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{n=0}^{n}b_k}=i^{\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}}=i^{\cos(1)}$$

$$\Rightarrow\ \lim_{n\to\infty}a_n=i^{\cos(1)}=e^{(\cos 1)\operatorname{Log} i}=e^{(\cos 1)\left\{\operatorname{Ln}1+i\frac{\pi}{2}\right\}}=e^{\frac{\pi}{2}i\cos 1}$$

$$\Rightarrow\ \lim_{n\to\infty}a_n=\cos(\frac{\pi}{2}\cos 1)+i\sin(\frac{\pi}{2}\cos 1)$$

barghnews.com

۱۵- گزینه‌ی «۳» صحیح است.

اگر $f(z)=(1+z)^{\frac{1}{z}}$،

$$\text{ضریب } z^2 \text{ در بسط لوران } a_2=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z^{2+1}}dz=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{(1+z)^{\frac{1}{z}}}{z^3}dz$$

$$\Rightarrow\ a_2=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{e^{\frac{1}{z}Ln(1+z)}}{z^3}dz=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{e^{\frac{1}{z}\left\{z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\frac{z^4}{4}+\cdots\right\}}}{z^3}dz$$

چون برای حوزه $|z|<1$ داریم:

$$\frac{1}{1+z}=1-z+z^2-z^3+z^4-\cdots$$

از طرفین سری انتگرال می‌گیریم، خواهیم داشت:

$$\Rightarrow\ Ln(1+z)=z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\frac{z^4}{4}+\frac{z^5}{5}-\cdots$$

$$e^1\left(e^{-\frac{z}{2}}\right)\left(e^{\frac{z^2}{3}}\right)\left(e^{-\frac{z^3}{4}}\right)\cdots=f(z)$$

از بسط ملکورن e^z استفاده می‌کنیم:

$$f(z)=e\left\{1-\frac{z}{2}+\frac{(-\frac{z}{2})^2}{2!}+\frac{(-\frac{z}{2})^3}{3!}+\frac{(-\frac{z}{2})^4}{4!}+\cdots\right\}\left\{1+\frac{z^2}{3}+\frac{(\frac{z^2}{3})^2}{2!}+\frac{(\frac{z^2}{3})^3}{3!}+\cdots\right\}\left\{\quad\right\}\cdots$$

$$f(z)=e\left\{1-\frac{z}{2}+\frac{z^2}{8}-\frac{z^3}{48}+\frac{z^4}{16\times 24}-\cdots\right\}\left\{1+\frac{z^2}{3}+\frac{z^4}{18}+\frac{z^6}{54}+\cdots\right\}\left\{\quad\right\}\cdots$$

$$f(z)=e\left\{\left(1-\frac{z}{2}+\frac{z^2}{8}-\frac{z^3}{48}+\cdots\right)+\frac{z^2}{3}-\frac{z^4}{18}+\cdots\right\}\underbrace{\left\{\qquad\right\}}_{\text{جملاتی با توان بیشتر از 3}}$$

$$f(z) \text{ در } z^2 \text{ ضریب } =e\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{3}\right)=\frac{11e}{24}$$

۱۶- گزینه‌ی «۳» صحیح است.

اگر $|\alpha|<1$ با توجه به این‌که

$$\frac{\alpha}{z-\alpha}=\frac{\alpha}{z(1-\frac{1}{\alpha})}=\frac{\alpha}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{\alpha}{z}}\ (|z|>|\alpha| \text{ برای})\ \frac{\alpha}{z-\alpha}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{z^n}$$

barghnews.com

$$\frac{\alpha}{z-\alpha}=\frac{\alpha}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\alpha}{z}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^{n+1}}{z^{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha^n}{z^n}$$

با قرار دادن $\begin{matrix} z=e^{i\theta} \\ |z|=1>|\alpha| \end{matrix}$ خواهیم داشت:

$$\frac{\alpha}{e^{i\theta}-\alpha}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha^n}{e^{in\theta}} \Rightarrow \frac{\alpha}{(\cos\theta-\alpha)+i\sin\theta}=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha^n e^{-n\theta}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{\alpha(\cos\theta-\alpha)-i\sin\theta}{\{(\cos\theta-\alpha)+i\sin\theta\}\{\cos\theta-\alpha)-i\sin\theta\}}}_{\text{صورت و مخرج را در مخرج مزدوج ضرب کردیم}}=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha^n(\cos n\theta-i\sin n\theta)$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha(\cos\theta-\alpha)}{(\cos\theta-\alpha)^2+\sin^2\theta}-\frac{i\alpha\sin\theta}{(\cos\theta-\alpha)^2+\sin^2\alpha}=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha^n\cos n\theta-i\sum_{n=1}^{\infty}\alpha^n\sin n\theta$$

از برابری 2 عدد مختلط داریم:

$$\begin{cases} \dfrac{\alpha(\cos\theta-\alpha)}{1-2\alpha\cos\theta+\alpha^2}=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\alpha^n\cos n\theta \\ \dfrac{\alpha\sin\theta}{1-2\alpha\cos\theta+\alpha^2}=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\alpha^n\sin\theta \xrightarrow{\alpha=\frac{1}{2}} \dfrac{\frac{1}{2}\sin\theta}{1-2\left(\frac{1}{2}\right)\cos\theta+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n\sin n\theta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{1}{2}\sin\theta}{1-\cos\theta+\frac{1}{4}}=\frac{2\sin\theta}{5-4\cos\theta}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^n\theta}{2^n}$$

۱۷- گزینه‌ی «۲» صحیح است.

طبق اصل ریمان در مورد تکینی‌های برداشتنی

۱۸- گزینه‌ی «۴» صحیح است.

طبق تعریف قطب مرتبه nاُم، z_0 قطب مرتبه اول g است.

۱۹- گزینه‌ی «۱» صحیح است.

$$(z+1)^2(z^2+4)=0$$

نقاط تکین $\begin{cases} \alpha_1=1 & (\text{قطب مرتبه } 2) \\ \alpha_2=-2i & (\text{قطب ساده}) \\ \alpha_3=2i & (\text{قطب ساده}) \end{cases}$

barghnews.com

همه‌ی قطب‌ها درون $|z|=5$ قرار دارند، پس داریم:

$$f(z)=\frac{A}{z+1}+\frac{Bz+C}{(z+1)^2}+\frac{D}{z+2i}+\frac{E}{z-2i}$$

پارامترهای A و B و C و D و E با توجه به هم‌ارزی $\frac{z^2-2z}{(z+1)^2(z^2+4)}=f(z)$ به‌دست می‌آیند:

$$A=\frac{-1}{3}\ ,\ B=\frac{-1}{3}\ ,\ C=\circ\ ,\ D=\frac{1}{3}\ ,\ E=\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow f(z)=\underbrace{\frac{-\frac{2}{3}}{z+1}}_{\text{مربوط به}\ \text{مانده اول}}+\frac{\frac{1}{3}}{(z+1)^2}+\underbrace{\frac{\frac{1}{3}}{z+2i}}_{\text{مربوط به}\ \text{مانده دوم}}+\underbrace{\frac{\frac{1}{3}}{z-2i}}_{\text{مربوط به}\ \text{مانده سوم}}\Rightarrow\begin{cases}B_2=\frac{-2}{3}\\ B_2=\frac{1}{3}\\ B_3=\frac{1}{3}\end{cases}$$

$$\text{انتگرال}=2\pi i(B_1+B_2+B_3)=2\pi i(-\frac{2}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3})=\circ$$

۲۰- گزینه‌ی «۲» صحیح است.

قطب‌های مرتبه اول $\alpha_3=3$ و $\alpha_{1,2}=\pm i \Rightarrow (z^2+1)(z-3)=\circ$ نقاط تکین

قطب‌های i و $-i$ داخل مسیر $C_r:|z|=r$ که $1<r<2$ است و قطب $\alpha=3$ خارج مسیر C_r است.

$$B_1=\operatorname*{Res}_{z=-i}\left(f(z)=\frac{e^z}{(z^2+1)(z-3)}\right)=\left.\frac{e^z}{(z+i)(z-3)}\right|_{z=i}$$
$$=\frac{e^i}{(i+i)(i-3)}=\frac{\cos 1+i\sin 1}{2i(-i+3)}$$

$$B_2=\operatorname*{Res}_{z=-i}\left(f(z)=\frac{e^z}{(z^2+1)(z-3)}\right)=\left.\frac{e^z}{(z-i)(z-3)}\right|_{z=-i}$$
$$=\frac{e^{-i}}{(-i+i)(i-3)}=\frac{\cos 1-i\sin 1}{2i(i+3)}$$

$$I=2\pi i(B_1+B_2)=2\pi i\left\{\frac{\cos 1+i\sin 1}{2i(i-3)}+\frac{\cos 1-i\sin 1}{2i(i+3)}\right\}$$

$$I=2\pi i\left\{\frac{(i+3)\cos 1+i(i+3)\sin 1+(i-3)\cos 1-i(i-3)\sin 1}{2i(i^2-9)}\right\}$$

$$I=\pi\left\{\frac{2i\cos 1+6i\sin 1}{(-1-9)}\right\}=\frac{-\pi i}{5}(\cos 1+3\sin 1)$$

barghnews.com

۲۱- گزینه‌ی «۴» صحیح است.

$2z+1=\circ \Rightarrow \alpha=\frac{-1}{2}$ قطب مرتبه سوم

$$\frac{z^2+1}{(2z+1)^3}=\frac{\left\{(z+\frac{1}{2})-\frac{1}{2}\right\}^4+1}{(2z+1)^3}$$

$$=\frac{(z+\frac{1}{2})^4-2(z+\frac{1}{2})^3+\frac{1}{2}(z+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{2}(z+\frac{1}{2})+(z+\frac{1}{2})^2+\frac{1}{16}}{2^3(z+\frac{1}{2})^3}$$

$$=\frac{z+\frac{1}{2}}{8}-\frac{1}{4}+\frac{\frac{3}{2}}{8(z+\frac{1}{2})}-\frac{\frac{1}{2}}{8(z+\frac{1}{2})^3}+\cdots$$

$\alpha=\frac{-1}{2}$ مانده تابع در $B=\frac{1}{z+\frac{1}{2}}$ ضریب $=\frac{2}{8}=\frac{3}{16}$

$\Rightarrow$ انتگرال $=2\pi i\left(\frac{3}{16}\right)=\frac{3\pi i}{8}$

۲۲- گزینه‌ی «۳» صحیح است.

$$\left.\begin{array}{l} e^z=1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\cdots \\ \sinh\frac{1}{z}=\frac{1}{1!z}+\frac{1}{3!z^3}+\frac{1}{5!z^5}+\cdots \end{array}\right\} \Rightarrow f(z)=e^z\sinh\frac{1}{z} \Rightarrow$$

$\frac{1}{z}$ ضریب $B=1\times\frac{1}{1!z}+\frac{1}{2!}\times\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}\times\frac{1}{5!}+\cdots+\frac{1}{(2n)(2n+1)!}+\cdots$ در بسط

$$\Rightarrow B=\sum_{n=\circ}^{\infty}\frac{1}{(2n)!(2n+1)!}$$

۲۳- گزینه‌ی «۴» صحیح است.

$f(z)=\frac{z}{z^2+k^2} \Rightarrow$ نقاط تکین $z=\pm ki$ قطب‌های ساده

قطب $\alpha=ki\,(k>\circ)$ بالای نیم‌صفحه است. B_1 را به‌دست آورید.

$$B_1=\operatorname{Res}\left(f(z)e^{iaz}\right)=\left.\frac{ze^{iaz}}{z+ki}\right|_{z=ki}=\frac{(ki)e^{ia(ki)}}{ki+ki}=\frac{1}{2}e^{-ak}$$

barghnews.com

$$\Rightarrow \int f(z)e^{iaz}dz = \int \frac{ze^{iaz}}{z^2+k^2}dz = 2\pi i\left(\frac{1}{2}e^{-ak}\right) = \pi i e^{-ak}$$

با برابر قرار دادن قسمت‌های حقیقی و موهومی دو به دو با هم داریم:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin ax}{x^2+k^2}dx = \pi e^{-ak}$$

۲۴- گزینه‌ی «۱» صحیح است.

نقاط تکین تابع f را به کسرها تجزیه می‌کنیم.

$$(z+1)^2(z^2+4) = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \alpha = -1 \rightarrow \text{قطب مرتبه دوم} \\ \alpha = \pm 2i \rightarrow \text{قطب های ساده} \end{cases}$$

ابتدا می‌نویسیم

$$f(z) = \frac{A}{z+1} + \frac{Bz+C}{(z+1)^2} + \frac{D}{z+2i} + \frac{E}{z-2i}$$

$$f(z) = \frac{-\frac{1}{3}}{z+1} + \frac{-\frac{1}{3}z}{(z+1)^2} + \frac{\frac{1}{3}}{z-2i} + \frac{\frac{1}{3}}{z-2i} \Rightarrow$$

A، B، C، D و E را به‌دست می‌آوریم:

مانده‌های تابع f را در قطب‌های آن پیدا می‌کنیم:

$$\frac{-\frac{1}{3}z}{(z+1)^2} = \frac{-\frac{1}{3}(z+1)+\frac{1}{3}}{(z+1)^2} = \frac{-\frac{1}{3}}{z+1} + \frac{\frac{1}{3}}{(z+1)^2}$$

$$\Rightarrow f(z) = \frac{-\frac{2}{3}}{z+1} + \frac{\frac{2}{3}}{(z+1)^2} + \frac{\frac{1}{3}}{z+2i} + \frac{\frac{1}{3}}{z-2i} \Rightarrow$$

$$B_1 = \frac{-2}{3} \ , \ B_2 = \frac{1}{3} \ , \ B_3 = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \int_C f(z)dz = 2\pi i(B_1+B_2+B_3) = 2\pi i\underbrace{\left(\frac{-2}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)}_{0} = 0$$

۲۵- گزینه‌ی «۱» صحیح است.

چون تابع $f(x)$ زوج است، لذا $b_n = 0$ و $T = 2L = 2\pi$ لذا:

barghnews.com

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_{\circ}^{\pi}f(x)\cos\frac{n\pi}{\pi}x\,dx=\frac{2}{\pi}\int_{\circ}^{\alpha}1\cos nx\,dx=\frac{2}{\pi}\frac{1}{n}\sin nx\Big|_{\circ}^{\circ}=\frac{2}{n\pi}\sin n\alpha$$

$$a_{\circ}=\frac{2}{\pi}\int_{\circ}^{\pi}f(x)dx=\frac{2}{\pi}\int_{\circ}^{\alpha}dx=\frac{2\alpha}{\pi}\ \Rightarrow\ f(x)=\frac{\alpha}{\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\pi}\sin n\alpha\cos nx$$

و با توجه به قضیه دیریلکه و این که $x=\circ$ نقطه پیوستگی تابع است داریم:

$$f(\circ)=1=\frac{\alpha}{\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\pi}\sin n\alpha\cos(\circ)\ \Rightarrow\ \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\alpha}{n}=1-\frac{\alpha}{\pi}$$

$$\Rightarrow\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\alpha}{n}=\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}=\frac{\pi-\alpha}{2}$$

۲۶- گزینه‌ی «۲» صحیح است.

تابع مورد نظر زوج بوده و داریم:

$$b_n=\circ$$

$$a_n=\frac{2}{L}\int_{\circ}^{L}x\cos\frac{n\pi}{L}x\,dx$$

$$a_n=\frac{2}{L}\left\{\frac{xL}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{L}x+\left(\frac{L}{n\pi}\right)^2\cos\frac{n\pi}{L}x\right\}\Bigg|_{\circ}^{L}=\frac{2}{L}\left(\left(\frac{L}{n\pi}\right)^2\cos n\pi-\left(\frac{L}{n\pi}\right)^2\right)$$

$$=\frac{2L}{n^2\pi^2}(\cos n\pi-1)=\begin{cases}\circ & n\,(\text{even})\\ \dfrac{-4L}{n^2\pi^2} & n\,(\text{odd})\end{cases}$$

۲۷- گزینه‌ی «۳» صحیح است.

با توجه به شکل واضح است که تابع $f(x)$ زوج می‌باشد پس $b_n=\circ$ و از طرفی داریم:

$$a_n=\frac{2}{L}\int_{\circ}^{L}f(x)\cos\frac{n\pi}{L}x\,dx\quad \text{و}\quad T=6=2L\ \Rightarrow\ L=3$$

$$\Rightarrow\ a_1=\frac{2}{3}\int_{\circ}^{3}f(x)\cos\left(\frac{\pi}{3}x\right)dx=\frac{2}{3}\left[\int_{\circ}^{1}\cos\frac{\pi}{3}x\,dx+\int_{1}^{3}(\circ)\,dx\right]$$

$$=\frac{2}{3}\times\frac{3}{\pi}\left[\sin\frac{3}{\pi}x\right]_{\circ}^{1}=\frac{2}{\pi}\left\{\sin\frac{3}{\pi}-\sin\circ\right\}=\frac{2}{\pi}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{\pi}$$

۲۸- گزینه‌ی «۱» صحیح است.

تابع $f(x)=x$ در فاصله $-\pi<x<\pi$ فرد بوده و گزینه 1 پاسخ صحیح خواهد شد.

barghnews.com

۲۹- گزینه‌ی «۳» صحیح است.

$$b_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{+L} f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx \Rightarrow b_1=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin\frac{1\pi}{\pi}x\,dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\left\{\int_{-\pi}^{\circ}\sin x\cdot\sin x\,dx+\int_{\circ}^{\pi}(\circ)\sin x\,dx\right\}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\circ}\frac{1-\cos 2x}{2}dx$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left(x-\frac{\sin 2x}{2}\right)\Bigg|_{-\pi}^{\circ}=\frac{1}{2\pi}(+\pi)=\frac{1}{2}$$

۳۰- گزینه‌ی «۳» صحیح است.

$$b_1=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\sin\frac{1\pi}{\pi}x\,dx=\frac{1}{\pi}\left\{\int_{-\pi}^{\circ}\sin x\sin x\,dx+\int_{\circ}^{\pi}\cos x\sin x\,dx\right\}$$

$$=\frac{1}{\pi}\left\{\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\sin 2x\right)\Bigg|_{-\pi}^{\circ}-\frac{1}{4}\cos 2x\Bigg|_{\circ}^{\pi}\right\}=\frac{1}{2}$$

۳۱- گزینه‌ی «۱» صحیح است.

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\big(f(x+ct)+f(x-ct)\big)+\frac{1}{2c}\big(G(x+ct)-G(x-ct)\big)$$

$$G(x)=\int g(x)\,dx=\int e^x dx=e^x$$

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\left(e^{x+ct}+e^{x-ct}\right)+\frac{1}{2c}\left(e^{x+ct}-e^{x-ct}\right)$$

$$e^x\left(ch(ct)\right)+\frac{e^x}{c}sh(ct)=e^x\left(ch(ct)+\frac{1}{c}sh(ct)\right)$$

۳۲- گزینه‌ی «۱» صحیح است.

چون $x<t$ بنابراین

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\left[f(x+t)-f(t-x)\right]+\frac{1}{2}\int_{t-x}^{x+t}g(\lambda)dx$$

$$u\left(\frac{L}{2},\frac{5L}{2}\right)=\frac{1}{2}\left[f(3L)-f(2L)\right]+\frac{1}{2}\int_{2L}^{3L}g(\lambda)f\lambda$$

$$u\left(\frac{L}{2},\frac{5L}{2}\right)=\frac{1}{2}\left[\frac{5L}{2}-\frac{3L}{2}\right]+\frac{1}{2}\int_{2L}^{3L}g(\lambda)\,d\lambda$$

$$g(\lambda)=(\lambda-2L)(3L-\lambda)=-\lambda^2+5\lambda L-6L^2$$

barghnews.com

$$u\left(\frac{L}{2},\frac{5L}{2}\right)=\frac{L}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{-\lambda^2}{3}+\frac{5\lambda^2}{2}L-6L^2\lambda\right)_{2L}^{3L}$$
$$=\frac{L}{2}+\frac{1}{2}\left(-9L^2+\frac{45}{2}L^3-18L^3+\frac{8}{3}L^3-10L^3+12L^3\right)$$
$$=\frac{L}{2}+\frac{1}{2}\left(-25+\frac{45}{2}+\frac{8}{3}\right)L^3=\frac{L}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}L^3\right)$$
$$=\frac{L}{2}\left(1+\frac{L^3}{6}\right)$$

۳۳- گزینه‌ی «۴» صحیح است.

$$w_t=4w_{xx}+4\varphi_{xx}+\sin x$$

شرط همگن بودن $\Rightarrow\ 4\varphi_{xx}+\sin x=\circ\ \Rightarrow\ \varphi_{xx}=-\frac{1}{4}\sin x\ \Rightarrow\ \varphi_x=+\frac{1}{4}\cos x+A$

$$\varphi=\frac{1}{4}\sin x+Ax+B$$

تا همین‌جا کافی است، مشخص است که پاسخ گزینه 4 است.

۳۴- گزینه‌ی «۴» صحیح است.

گزینه اول:

$$u_x=\cos xe^{-y}+2x\ \Rightarrow\ u_{xy}=-\cos xe^{-y}\Rightarrow\ u_{xy}+u_x\neq\circ$$

گزینه دوم:

$$u_x=2xe^{-x}-\left(x^2+\sin y\right)e^{-x}\ \Rightarrow\ u_{xy}=-\cos ye^{-x}\ \Rightarrow\ u_{xy}+u_x\neq\circ$$

گزینه سوم:

$$u_x=\cos x\cdot e^{-x}-\left(y^2+\sin x\right)e^{-x}+2x\ \Rightarrow\ u_{xy}=-2ye^{-x}\ \Rightarrow\ u_{xy}+u_x\neq\circ$$

گزینه چهارم:

$$u_x=\left(2x^2+\cos x\right)e^{-y}\ \Rightarrow\ u_{xy}=-\left(2x^2+\cos x\right)e^{-y}\ \Rightarrow\ u_{xy}+u_x=\circ$$

راه دوم: با توجه به مفاهیم بخش قبل:

با فرض $u_x=v$ داریم:

$$v_y+v=\circ\ \Rightarrow\ v=A(x)e^{-y}\ \Rightarrow\ u_x=A(x)e^{-y}\ \Rightarrow\ u=B(x)e^{-y}+C(y)$$

barghnews.com

پس گزینه 4 صحیح است.

۳۵- گزینه‌ی «۴» صحیح است.

شرط $u(\circ,t)=\circ$ ایجاب می‌کند که در $x=\circ$ توابع مورد نظر صفر باشند که این موضوع فقط در گزینه‌های دوم و چهارم ارضاء می‌شود شرط $u_x(L,T)=\circ$ می‌طلبد در $x=L$ مشتق توابع مورد نظر صفر باشند فقط در گزینه چهارم درست است.

۳۶- گزینه‌ی «۱» صحیح است.

در این مسأله داریم: $g(x)=\circ$ و $f(x)=x^2$ و $c=1$، لذا از حل دالامبر معادله موج داریم:

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\{f(x+ct)+f(x-ct)\}+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}g(\tau)d\tau$$

$$=\frac{1}{2}\{(x+t)^2+(x-t)^2\}=x^2+t^2$$

۳۷- گزینه‌ی «۳» صحیح است.

با توجه به شرایط مرزی که روی مشتق تعریف شده، مشخص می‌شود که گزینه‌های 2 یا 1 غلط است و با توجه به این‌که $u(\pi,t)=\circ$ بنابراین گزینه 3 صحیح است.

۳۸- گزینه‌ی «۲» صحیح است.

چون شرایط مرزی روی مشتق صفر است پس کسینوسی است و از طرفی در $x=L$ نیز بایستی این کسینوس صفر شود بنابراین جواب گزینه 2 خواهد شد.

۳۹- گزینه‌ی «۱» صحیح است.

تنها گزینه درست که شرایط کرانداری را ارضا کند گزینه «1» است.

۴۰- گزینه‌ی «۳» صحیح است.

جواب معادله با توجه به شرایط مرزی $T(\circ,t)=T(1,t)=\circ$ به‌صورت $\sum_{n=1}^{\infty}b_n e^{-n^2t}\sin n\pi x$ است با اعمال شرط $T(x,\circ)=100\sin\pi x$ داریم:

$$100\sin\pi x=\sum_{n=1}^{\infty}b_n e^{-n^2t}\sin n\pi x$$

$$\Rightarrow\ 100\sin\pi x=b_1\sin\pi x+b_2\sin 2\pi x+b_3\sin 3\pi x+\cdots$$

barghnews.com

پس باید $b_1 = 100$ و بقیه b_nها صفر باشد. لذا جواب کلی به فرم زیر است:

$$T(x,t) = 100e^{-t}\sin \pi x \quad \Rightarrow \quad T(0/5,2) = 100e^{-2}\sin\frac{\pi}{2} = \frac{100}{e^2} = 13/534$$

۴۱- گزینه‌ی «۳» صحیح است.

شرط مرزی $u(a,\theta) = \sin 5\theta$ باید در جواب پیشنهادی صدق کند لذا گزینه‌های 1 و 2 قابل قبول نمی‌باشند.

جواب قابل قبول باید در $r = \circ$ محدود باشد زیرا مسأله در هندسه $r \le a$ در حال تحلیل می‌باشد و این ویژگی در گزینه 4 موجود نمی‌باشد بنابراین تنها انتخاب قابل قبول گزینه 3 خواهد بود.

۴۲- گزینه‌ی «۲» صحیح است.

از آن‌جا که تابع $u(x,y)$ معادله لاپلاس را ارضاء کرده لذا تابعی همساز است. پس هدف پیدا کردن ماکزیمم و مینیمم تابع $u = x^2 + y^2$ با شرط $x^2 + y^2 = 4$ خواهد بود.

به ازاء $x^2 + y^2 = 4$ و $x^2 = y^2 = 2$ به‌دست می‌آید. $u_{max} = 4$

و به ازاء $y^2 = 4$ و $x^2 = \circ$ و $y^2 = \circ$ یا $x^2 = 4$ به‌دست می‌آید. $u_{min} = \circ$

۴۳- گزینه‌ی «۳» صحیح است.

با توجه به شعاعی بودن مسئله فقط شکل استاندارد 3 می‌تواند پاسخ باشد.

۴۴- گزینه‌ی «۲» صحیح است.

جواب معادله لاپلاس در مختصات قطبی:

$$u(r,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty}(A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta)\cdot r^n$$

لذا در مرکز، مقدار u باید برابر ثابت سری فوریه شرط مرزی $u(a,\theta)$ باشد و از آن‌جا که:

$$a_\circ = \frac{1}{\pi}\int_\circ^\pi f(\theta)\,d\theta = \frac{1}{\pi}\int_\circ^\pi 2\theta\,d\theta = \frac{1}{\pi}\theta^2\Big|_\circ^\pi = \pi$$

پس در $r = \circ$ مقدار u برابر $\frac{\pi}{2}$ خواهد بود.

۴۵- گزینه‌ی «۴» صحیح است.

$$[sU(x,s) - u(x,\circ)] - \frac{\partial^2}{\partial x^2}U(x,s) = G(s)$$

barghnews.com

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - sU + G(s) = \circ$$

$$\lambda^2 - s = \circ \Rightarrow \lambda^2 = s \Rightarrow \lambda = \pm\sqrt{s} \Rightarrow U_h(x,s) = A(s)e^{-\sqrt{s}x} + B(s)e^{\sqrt{s}x}$$

از آن‌جا که $\lim_{s\to\infty, x>\circ} U(x,s)$ باید محدود باشد لازم است که $B(s) = \circ$ و خواهیم داشت:

$$U_h(x,s) = A(s)e^{-\sqrt{s}x}$$

و با توجه به معادله $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - sU + G(s) = \circ$ جواب خصوصی برابر $U_P = \frac{G(s)}{s}$ می‌باشد، لذا:

$$U = A(s)e^{-\sqrt{s}x} + \frac{G(s)}{s}$$

۴۶- گزینه‌ی «۲» صحیح است.

از طرفین معادله داده شده لاپلاس می‌گیریم:

$$\left(s^2U(x,s) - su(x,\circ) - u_t(x,\circ)\right) - \frac{\partial^2}{\partial x^2}U(x,s) = e^{-\frac{x}{a}s}$$

با اعمال شرایط اولیه $u(x,\circ) = u_t(x,\circ) = \circ$ داریم:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - s^2 U = -e^{-\frac{x}{a}s}$$

معادله مشخصه معادله همگن نظیر $\lambda^2 - s^2 = \circ$ با ریشه‌های $\lambda = \pm s$ است که دارای پایه‌های جواب e^{-sx} و e^{sx} می‌باشد. جواب خصوصی معادله غیرهمگن نیز چنین پیدا می‌شود:

$$U_P = \frac{1}{D^2 - s^2}\left(-e^{-\frac{x}{a}s}\right) = -\frac{1}{\left(-\frac{s}{a}\right)^2 - s^2} - e^{-\frac{x}{a}s} = \frac{1}{s^2\left(1 - \frac{1}{a^2}\right)}e^{-\frac{x}{a}s}$$

$$U(x,s) = c_1e^{-sx} + c_2e^{sx} + \frac{1}{s^2\left(1 - \frac{1}{a^2}\right)}e^{-\frac{x}{a}s}$$

۴۷- گزینه‌ی «۴» صحیح است.

$$F(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-jwx}dx$$

$$F(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-1}^{1} e^{a^2ix}e^{-iwx}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{e^{(a^2-w)ix}}{a^2i - iw}\right]_{-1}^{1}$$

barghnews.com

$$\Rightarrow\ F(w)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{(a^2-w)i}\left(e^{(a^2-w)i}-e^{-(a^2-w)i}\right)$$

$$F(w)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{(a^2-w)i}\times 2\sin in(a^2-w)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin(a^2-w)}{a^2-w}$$

۴۸- گزینه‌ی «۲» صحیح است.

بنابه خاصیت دوگان گزینه دوم پاسخ صحیح خواهد شد.

۴۹- گزینه‌ی «۲» صحیح است.

۵۰- گزینه‌ی «۴» صحیح است.

با توجه به فرض مسأله بدیهی است که $f(x)$ ضریب انتگرال فوریه کسینوسی تابع $g(\lambda)=\frac{1}{1+\lambda^2}$ را نشان می‌دهد لذا باید داشته باشیم:

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_{\circ}^{\infty}g(\lambda)\cos\lambda x\,dx=\frac{2}{\pi}\int_{\circ}^{\infty}\frac{1}{1+\lambda^2}\cos\lambda x\,d\lambda$$

۵۱- گزینه‌ی «۲» صحیح است.

۵۲- گزینه‌ی «۱» صحیح است.

گزینه «1» صحیح است. البته از نظر حضور ضریب π سؤال مشکل دارد.

۵۳- گزینه‌ی «۲» صحیح است.

$$f_c=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{\circ}^{+\infty}f(x)\cos\omega x\,dx=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{\circ}^{+\infty}e^{-x}\cos\omega x\,dx$$

برای محاسبه حاصل انتگرال فوق از تبدیل لاپلاس استفاده می‌کنیم و در نهایت قرار می‌دهیم:

$$L\{\cos\omega x\}=\left.\frac{s}{s^2+\omega^2}\right|_{s=1}=\frac{1}{1+\omega^2}\ \Rightarrow\ f_c=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\omega^2+1}$$

بنابراین گزینه «2» صحیح است.

۵۴- گزینه‌ی «۲» صحیح است.

از آن‌جایی که تابع فرد است تنها گزینه‌های 2 و 4 می‌تواند درست باشند: $\hat{f}(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)(\cos\omega x-i\sin\omega x)dx$

از آن‌جا که f تابعی فرد است لذا $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\cos\omega x\,dx=\circ$ وداریم:

barghnews.com

$$\hat{f}(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cdot(-i\sin\omega x)dx=2\int_{\circ}^{+\infty} f(x)(-i\sin\omega x)dx$$

$$=-2i\int_{\circ}^{\pi}\sin x\sin\omega x\,dx$$

با استفاده از روش جزء به جزء داریم:

$$\int_{\circ}^{\pi}\sin x\sin wx\,dx=-\sin x\frac{\cos\omega x}{\omega}\Bigg|_{\circ}^{\pi}+\cos x\frac{\sin\omega x}{\omega^2}\Bigg|_{\circ}^{\pi}+\int_{\circ}^{\pi}\frac{\sin x\sin\omega x}{\omega^2}dx$$

$$\Rightarrow\left(1-\frac{1}{\omega^2}\right)\int_{\circ}^{\pi}\sin x\sin\omega x\,dx=-\frac{\sin\omega\pi}{\omega^2}\ \Rightarrow\ \int_{\circ}^{\pi}\sin x\sin\omega x\,dx=\frac{\sin\omega\pi}{1-\omega^2}$$

$$\hat{f}(\omega)=-2i\frac{\sin\omega\pi}{1-\omega^2}=\frac{2i\sin\omega\pi}{\omega^2-1}$$

۵۵- گزینه‌ی «۲» صحیح است.

با توجه به زوج بودن تابع زیر علامت انتگرال داریم:

$$I=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{w\sin wx}{1+w^2}dw$$

مخرج کسر $\frac{w}{1+w^2}$ هیچ صفر حقیقی ندارد لذا می‌توان نوشت:

$$A=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{w\sin wx}{1+w^2}dw=\operatorname{Im}\int_{\operatorname{Im}z>\circ}\frac{ze^{ixz}}{1+z^2}dz$$

با توجه به آن‌که قطب‌های تابع $f(z)$، $z=\pm i$ هستند و تنها $z=i$ در نیم‌صفحه فوقانی واقع است می‌نویسیم:

$$\operatorname{Res}\frac{ze^{ixz}}{1+z^2}\Bigg|_{z=i}=\frac{ze^{ixz}}{2z}\Bigg|_{z=i}=\frac{e^{-x}}{2}$$

$$\int_{\operatorname{Im}z}\frac{ze^{ixz}}{1+z^2}dz=2\pi i\left(\frac{e^{-x}}{2}\right)=\pi ie^{-x}$$

پس: $I=\frac{\pi e^{-x}}{2}$ می‌باشد.

۵۶- گزینه‌ی «۳» صحیح است.

نقاط تکین $\frac{z}{z^2+1}e^{iz}$ عبارتند از:

$$z^2+1=0\ \rightarrow z=\pm i$$

که هر دو قطب مرتبه اولند و فقط $z=i$ در نیم‌صفحه فوقانی واقع است.

barghnews.com

۵۷- گزینه‌ی «۴» صحیح است.

برای مانده، $n=1$ فقط گزینه آخر درست است.

۵۸- گزینه‌ی «۱» صحیح است.

روی دایره $|z|=1$ داریم:

$$z=e^{i\theta}\Rightarrow dz=ie^{i\theta}d\theta\Rightarrow|dz|=\left|ie^{i\theta}\right|d\theta=\left|i(\cos\theta+i\sin\theta)\right|d\theta$$

$$=\left|-\sin\theta+i\cos\theta\right|d\theta=\sqrt{(-\sin\theta)^2+(\cos\theta)^2d\theta}\,d\theta$$

بنابراین به‌دست می‌آید:

$$I=\int_{|z|=1}|z||dz|=\int_{\theta=\circ}^{2\pi}1d\theta=2\pi$$

۵۹- گزینه‌ی «۳» صحیح است.

$$z=x+iy\,,\ \bar{z}=x-iy\,,\ dz=dx+idy$$

لذا روی مسیر مورد نظر که در آن $dx=3dy$ و $x=3y$ می‌باشد، می‌توان نوشت:

۶۰- گزینه‌ی «۳» صحیح است.

با توجه به آزمون کوشی برای همگرایی داریم:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{(z+i)^n}{2^{2n}}}=\left|\frac{z+i}{4}\right|<1\ \Rightarrow\qquad |z+i|<4$$

۶۱- گزینه‌ی «۳» صحیح است.

$$\sqrt[n]{(kn)!}\sim\left(\frac{kn}{e}\right)^k$$

شرط همگرایی سری مورد نظر:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|a(n,z)\right|}<1\ \Rightarrow\ \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{(2n)!}{(n!)^2}z^n\right|}<1\ \Rightarrow\ \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{(2n)!}}{\sqrt[n]{(n!)^2}}|z|<1$$

$$\Rightarrow\ \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{2n}{e}\right)^2}{\left(\frac{n}{e}\right)^2}|z|<1\qquad\Rightarrow\ 4|z|<1\ \Rightarrow\ |z|<\frac{1}{4}$$

یعنی شعاع همگرایی $R=\frac{1}{4}$ است.

barghnews.com

۶۲- گزینه‌ی «۴» صحیح است.

۶۳- گزینه‌ی «۴» صحیح است.

طبق قضیه اساسی حساب، هر معادله درجه n دارای n ریشه می‌باشد، (که ممکن است برخی از آن‌ها حقیقی و بعضی مختلط باشند)، لذا چون در مسأله بر روی حقیقی بودن ریشه‌ها تأکیدی ندارد،

۶۴- گزینه‌ی «۴» صحیح است.

۶۵- گزینه‌ی «۱» صحیح است.

اگر v مزدوج همساز u باشد، باید داشته باشیم،

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{-\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial y}=6xy+4x \\ \dfrac{\partial v}{\partial x}=-3x^2+3y^2+4y \end{cases}$$

با انتگرال‌گیری نسبت به متغیر y از معادله اول داریم:

$$v=3xy^2+4xy+f(x)$$

و با قرار دادن این مقدار در معادله دوم به‌دست می‌آید:

$$3y^2+4y+f'(x)=-3x^2+3y^2+4y \;\Rightarrow\; f'(x)=-3x^2 \Rightarrow f(x)=-x^3+c$$

$$v=3xy^2+4xy-x^3$$

۶۶- گزینه‌ی «۲» صحیح است.

$$u_x=3ax^2+by \qquad u_{xx}=6ax$$
$$u_y=bx \qquad u_{yy}=\circ$$

لذا برای هارمونیک بودن تابع $u(x,y)$ باید داشته باشیم:

$$u_{xx}+u_{yy} \;\Rightarrow\; 6ax=\circ \;\Rightarrow\; a=\circ$$

۶۷- گزینه‌ی «۲» صحیح است.

تابع مورد نظر یک تابع سه متغیره بوده و برای هارمونیک بودن باید معادله لاپلاس زیر ارضاء کند:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}=\circ$$

barghnews.com

$$\frac{\partial p}{\partial x}=2Ax+By+Fz \ , \ \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}=2A$$

$$\frac{\partial p}{\partial y}=Bx+2Cy+Dz \ , \ \frac{\partial^2 p}{\partial y^2}=2C$$

$$\frac{\partial p}{\partial z}=Dy+2Ez+Fx \ , \ \frac{\partial^2 p}{\partial z^2}=2E$$

یعنی باید داشته باشیم:

$$2A+2C+2E=\circ \ \Rightarrow \ E=-(A+C)$$

۶۸- گزینه‌ی «۴» صحیح است.

با توجه به آن‌که:

$$z^2=\left(re^{i\theta}\right)^2=r^2e^{2i\theta}=r^2(\cos 2\theta+i\sin 2\theta)$$

لذا $f(r,\theta)=r^2(\cos 2\theta-i\sin 2\theta)=r^2\cos 2\theta$ قسمت حقیقی تابع تحلیلی z^2 بوده و در نتیجه هارمونیک است.

۶۹- گزینه‌ی «۳» صحیح است.

$$(\alpha+\beta+\gamma)(\overline{\alpha}\beta+\alpha\gamma+\overline{\gamma\beta})=(\alpha\beta\gamma)(\overline{\alpha\beta\gamma})$$

چون $|z|^2=1$ داریم:

$$\Rightarrow (\alpha\beta)(\overline{\alpha\beta})+\alpha\beta(\overline{\alpha\gamma}+\overline{\beta\gamma})+(\alpha\gamma)(\overline{\alpha\gamma})+\alpha\gamma(\overline{\alpha\beta}+\overline{\beta\gamma})+(\alpha\beta)(\beta\gamma)+\beta\gamma(\overline{\alpha\gamma}+\overline{\alpha\beta})$$

$$=|\alpha|^2|\beta|^2|\gamma|^2$$

از $\alpha\overline{\alpha}=|\alpha|^2=1$، $\beta\overline{\beta}=|\beta|^2=1$، $\gamma\overline{\gamma}=|\gamma|^2=1$ استفاده می‌کنیم.

$$\Rightarrow 1+1+1+\beta\overline{\gamma}+\gamma\overline{\beta}+\alpha\overline{\gamma}+\gamma\overline{\alpha}+\alpha\overline{\beta}+\overline{\alpha}\beta^*=1$$

$$\Rightarrow \ \beta\overline{\gamma}+\gamma\overline{\beta}+\alpha\overline{\gamma}+\gamma\overline{\alpha}+\alpha\overline{\beta}+\overline{\alpha}\beta=-2 \qquad (*)$$

فرض می‌کنیم: $A=|\alpha+\beta+\gamma|$ در نتیجه داریم:

$$A^2=|\alpha+\beta+\gamma|^2=(\alpha+\beta+\gamma)(\overline{\alpha}+\overline{\beta}+\overline{\gamma})$$

$$\Rightarrow A^2=\alpha\overline{\alpha}+\alpha\overline{\beta}+\alpha\overline{\gamma}+\beta\overline{\beta}+\beta\overline{\alpha}+\beta\overline{\gamma}+\gamma\overline{\gamma}+\gamma\overline{\alpha}+\gamma\overline{\beta}$$

به ترتیب بالا طبق رابطه (*) خواهیم داشت:

$$\Rightarrow A^2=1+1+1+\alpha\overline{\beta}+\overline{\alpha}\beta+\alpha\overline{\gamma}+\gamma\overline{\alpha}+\beta\overline{\gamma}+\overline{\gamma}\beta=3-2=1$$

barghnews.com

$$A^2=|\alpha+\beta+\gamma|^2=1 \Rightarrow \ A=|\alpha+\beta+\gamma|=1$$

۷۰- گزینه‌ی «۴» صحیح است.

$$f(z)=e^{\frac{1}{z}}=w\neq 0$$

فرض کنید $w=re^{i\theta}$، آن‌گاه:

$$\Rightarrow \frac{1}{z}=\ln w=|r|+i(\theta+2k\pi)\quad k\in$$

$$\Rightarrow z=\frac{1}{|r|+i(\theta+2k\pi)}\quad k\in$$

به ازای $k=0$ یک جواب در همسایگی صفر وجود دارد.

۷۱- گزینه‌ی «۲» صحیح است.

$$|z-ni|=|z+ni|\ \Rightarrow\ |z-ni|^2=|z+ni|^2$$

$$\Rightarrow (z-ni)(\bar{z}+ni)=(z+ni)(\bar{z}-ni)$$

$$\Rightarrow\ z\bar{z}+niz-ni\bar{z}+n^2=z\bar{z}-niz+ni\bar{z}+n^2\ \Rightarrow\ 2niz=2ni\bar{z}\ \Rightarrow\ z=\bar{z}$$

$\Rightarrow\ x+iy=x-iy\ \Rightarrow\ y=0$ (محور حقیقی) محور xها

۷۲- گزینه‌ی «۴» صحیح است.

$$z=x+iy\ \Rightarrow\ A=x+y$$

می‌دانیم $x^2+y^2=|z|^2$، y را برحسب x می‌نویسیم $y=\sqrt{|z|^2-x^2}$ پس:

$$\Rightarrow\ A_x=x+\sqrt{|z|^2-x^2}$$

مشتق A_x را نسبت به x می‌گیریم و مساوی صفر قرار می‌دهیم.

$$\Rightarrow\ A'_x=1-\frac{2x}{2\sqrt{|z|^2-x^2}}=\frac{\sqrt{|z|^2-x^2}-x}{\sqrt{|z|^2-x^2}}=0\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \sqrt{|z|^2-x^2}-x=0\ \Rightarrow\ \sqrt{|z|^2-x^2}=x\qquad |x|\leq|z|$$

$$\Rightarrow\ |z|^2-x^2=x^2\ \Rightarrow\ x^2=\frac{|z|^2}{2}\ \Rightarrow\ \begin{cases}x=\pm\frac{|z|}{\sqrt{2}}\\ y=\pm\frac{|z|}{\sqrt{2}}\end{cases}$$ نقطه اکسترمم

barghnews.com

حال باید ببینیم کدام‌یک از نقاط اکسترمم، نقطه ماکزیمم نسبی تابع A است. برای این منظور مشتق دوم A را به ازای این نقاط، به‌دست می‌آوریم. آن‌هایی که منفی هستند جواب این پرسش هستند.

از A'_x می‌توان A''_x را به‌دست آورد.

$$A''_x = \frac{(-\frac{x}{\sqrt{|z|^2-x^2}}-1)\sqrt{|z|^2-x^2}+\frac{x}{\sqrt{|z|^2-x^2}}(\sqrt{|z|^2-x^2}-x)}{|z|^2-x^2}$$

به ازای هر x، $A''_x < 0$

$$A''_x = \frac{-(x^2+1)\sqrt{|z|^2-x^2}}{\sqrt{|z|^2-x^2}(|z|^2-x^2)} = \frac{-(x^2+1)}{|z|^2-x^2} < 0$$

در واقع $A_{max} = \frac{|z|}{\sqrt{2}} + \frac{|z|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}|z|$ مشتق دوم A_x $A''_x(x=\pm\frac{|z|}{\sqrt{2}}) = \frac{-2\sqrt{2}}{|z|} < 0$ همه نقاط اکسترمم، ماکزیمم نسبی هستند.

۷۳- گزینه‌ی «۴» صحیح است.

$$|z_1+z_2| = |z_1|+|z_2| \Rightarrow |z_1+z_2|^2 = (|z_1|+|z_2|)^2 \begin{cases} z_1 = r_1e^{i\theta_1} \\ z_2 = r_2e^{i\theta_2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow (z_1+z_2)(\overline{z}_1+\overline{z}_2) = |z_1|^2+|z_2|^2+2|z_1||z_2|$$

چون $|z_1|^2 = z_1\overline{z}_2$ و $|z_2|^2 = z_2\overline{z}_2$

$$\Rightarrow z_1\overline{z}_1+z_1\overline{z}_2+z_2\overline{z}_1+z_2\overline{z}_2 = |z_1|^2+|z_2|^2+2|z_1||z_2|$$

با ساده کردن خواهیم داشت:

$$\Rightarrow z_1\overline{z}_2+z_1z_2 = 2|z_1||z_2| \Rightarrow 2\,\mathrm{Re}(z_1\overline{z}_2) = 2|z_1||z_2|$$

$$\mathrm{Re}(z_1\overline{z}_2) = |z_1||z_2| \Rightarrow \mathrm{Re}(r_1r_2e^{i(\theta_1-\theta_2)}) = r_1r_2$$

$$\Rightarrow r_1r_2\cos(\theta_1-\theta_2) = r_1r_2 \xrightarrow{r_1r_2\neq 0} \theta_1-\theta_2 = 2k\pi$$

۷۴- گزینه‌ی «۱» صحیح است.

$$z = x+iy \Rightarrow \left|\frac{z+1}{z-1}\right| = \frac{|z+1|}{|z-1|} = \frac{|x+iy+1|}{|x+iy-1|}$$

طبق فرض

$$\Rightarrow \left|\frac{z+1}{z-1}\right|^2 = \frac{|(x+1)+iy|^2}{|(x-1)+iy|^2} = \frac{(x+1)^2+y^2}{(x-1)^2+y^2} = 16$$

$$\Rightarrow (x+1)^2+y^2 = 16\{(x-1)^2+y^2\}$$

$$\Rightarrow x^2+2x+1+y^2 = 16\{x^2+y^2-2x+1\}$$

barghnews.com

$$\Rightarrow 15x^2+15y^2-34x+15=0 \Rightarrow x^2-\frac{34}{15}x+y^2=-1$$

$$\Rightarrow (x-\frac{17}{15})^2-(\frac{17}{15})^2+y^2=-1 \Rightarrow (x-\frac{17}{15})^2+y^2=(\frac{17}{15})^2-1=\frac{64}{15^2}=\frac{8^2}{15^2}$$

$$\Rightarrow (x-\frac{17}{15})^2+y^2=(\frac{8}{15})^2$$

مکان هندسی عبارت است از: دایره‌ای به شعاع $\frac{8}{15}$ و مرکز $(\frac{17}{15},0)$.

۷۵- گزینه‌ی «۱» صحیح است.

$f(z)=\lim\limits_{z\to\infty}(z-e^z)=\infty-\infty$ مبهم

در این‌جا روش مستقیم و معمولی وجود ندارد تا حد را به‌دست آوریم.

قضیه تیلور $e^z=1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\cdots$

$$\Rightarrow z-e^z=z-\left\{1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\cdots\right\}=-1-\frac{z^2}{2!}-\frac{z^3}{3!}+\cdots$$

$$\Rightarrow \lim_{z\to\infty}f(z)=-1-\infty=-\infty$$

توجه کنید اگر از مسیرهای مختلف مثلاً $x=0$ یا $y=x$ حد را حساب کنیم باز هم ابهام $\infty-\infty$ نیز خواهیم داشت.

۷۶- گزینه‌ی «۳» صحیح است.

ابتدا یک راه حل تستی را ارایه می‌دهیم سپس آن را در حالت کلی به‌دست می‌آوریم.

راه حل تستی: فرض می‌کنیم $f(z)=z$ که تابع تحلیلی است.

$$f(z)=z=x+iy$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |f(z)|^2=x^2+y^2 \\ f'(z)=1 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow (\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2})|f(z)|^2=(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2})(x^2+y^2)=2+2=4 \\ \Rightarrow A|f'(z)|^2=A\times 1^2=A \end{array}\right\} \Rightarrow$$

از برابری فرض تست خواهیم داشت: $A=4$

راه حل کلی: در حالت کلی داریم:

barghnews.com

$$f(z)=u+iv$$

$$|f(z)|^2=u^2+v^2 \Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x^2}|f(z)|^2+\frac{\partial^2}{\partial y^2}|f(z)|^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}(u^2+v^2)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}(u^2+v^2)$$

$$f'(z)=u_x+iv_x$$

با استفاده از معادلات لاپلاس و قضیه کشی- ریمان نشان داده می‌شود که $A=4$.

طبیعی است که راه حل تستی ما را زودتر به نتیجه می‌رساند. فقط یادآوری این نکته ضروری است که انتخاب مثال‌ها برای توابع در این‌گونه موارد مستلزم دقت فراوان است. این مثال‌ها باید فرض مسأله را تأمین کنند.

۷۷- گزینه‌ی «۲» صحیح است.

$$\lim_{h\to\circ}\frac{f(x+iy+nih)-f(x-yi)}{h}=\lim_{h\to\circ}\frac{f\left(x+i(y+nh)\right)-f(x+yi)}{h}$$

$$=\lim_{h\to\circ}\frac{f(x,y+nh)-f(x,y)}{h}=nf_y$$

چون:

$$f_y=\lim_{h\to\circ}\frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h}$$

لذا:

$$\lim_{h\to\circ}\frac{f(x,y+nh)-f\left(x,y+(n-1)h\right)+f\left(x,y+(n-1)h\right)-f(x,y)}{h}$$

$$=f_y+\lim_{h\to\circ}\frac{f\left(x,y+(n-1)h\right)-f(x,y)}{h}$$

با ادامه روند به nfy می‌رسیم.

۷۸- گزینه‌ی «۳» صحیح است.

$$f(x+iy)=\frac{xy(x+iy)}{x^2+y^2}\to f'(\circ)=\lim_{z\to\circ}\frac{f(z)-f(\circ)}{z}$$

$$=\lim_{(x,y)\to(\circ,\circ)}\frac{xy(x+iy)}{(x+iy)(x^2+y^2)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(\circ)=\lim_{(x,y)\to(\circ,\circ)}\frac{xy}{x^2+y^2}\xrightarrow{\text{در مسیر } y=\alpha x} f'(\circ)=\lim_{x\to\circ}\frac{x(\alpha x)}{x^2+\alpha^2x^2}=\frac{\alpha}{1+\alpha^2}$$

$f'(\circ)$ بستگی به α دارد لذا بنابه یکتایی حد، $f'(\circ)$ وجود ندارد.

barghnews.com

۷۹- گزینه‌ی «۲» صحیح است.

چون $z=0$ ریشه مشترک صورت و مخرج کسر است لذا حد منجر به ابهام از نوع $\frac{0}{0}$ می‌شود. بنابراین برای رفع ابهام باید صورت و مخرج را بر عامل $z-1$ تقسیم می‌کنیم تا عامل صفرکننده در کسر برداشته شود.

$$\lim_{z\to 1}\frac{7z^5-4z^4+5z^2-6z-2}{z-1}=\lim_{z\to 1}(7z^4+3z^3+3z^2+8z+2)$$
$$=7(1)^4+3(1)^3+3(1)^2+8(1)+2$$
$$=23$$

مراحل تقسیم که مانند تقسیم معمولی است بعد از راه حل تستی می‌آوریم.

راه حل تستی، استفاده از قاعده هوپیتال است که در مجموعه اعداد حقیقی به‌کار می‌رود. این قاعده را می‌توان در مجموعه اعداد مختلط استفاده کرد. برای توابع تحلیلی f و g در نقطه $z=a$ به‌طوری که $g(a)\neq 0$ در صورتی که مشتقات متوالی این توابع وجود داشته باشد، آن‌گاه:

$$\lim_{z\to a}\frac{f(z)}{g(z)}=\lim_{z\to a}\frac{f'(z)}{g'(z)}=\lim_{z\to a}\frac{f''(z)}{g''(z)}=\cdots$$

$$\lim_{z\to 1}\frac{7z^5-4z^4+5z^2-6z-2}{z-1}=\lim_{z\to 1}\frac{35z^4-16z^3+10z-6}{1}$$
$$=35-16+10-6=23$$

$$\begin{array}{l|l}
7z^5-4z^4+5z^2-6z-2 & z-1 \\ \hline
\underline{7z^5-7z^4} & 7z^4+3z^3+3z^2+8z+2 \\
\quad 3z^4+5z^2 & \\
\quad \underline{3z^4-3z^3} & \\
\qquad 3z^3+5z^2 & \\
\qquad \underline{3z^3-3z^2} & \\
\qquad\quad 8z^2-6z & \\
\qquad\quad \underline{8z^2-8z} & \\
\qquad\qquad 2z-2 & \\
\qquad\qquad \underline{2z-2} & \\
\qquad\qquad\quad 0 &
\end{array}$$

۸۰- گزینه‌ی «۲» صحیح است.

$$|z|=2\Rightarrow z=2e^{i\theta}=x+iy$$
$$w=\alpha+i\beta$$

barghnews.com

$$w=\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z}) \Rightarrow w=\frac{1}{2}(2e^{i\theta}+\frac{1}{2^{e^{i\theta}}})=e^{i\theta}+\frac{1}{4}e^{-i\theta}$$

$$=(\cos\theta+i\sin\theta)+\frac{1}{4}(\cos\theta-i\sin\theta) \Rightarrow w=\frac{5}{4}\cos\theta+\frac{3}{4}i\sin\theta$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\cos\theta=\frac{x}{r}\\ \sin\theta=\frac{y}{r}\end{cases} \Rightarrow w=\frac{5}{4}\cdot\frac{x}{r}+\frac{3}{4}\cdot\frac{y}{r}=\alpha+i\beta$$

چون $x^2+y^2=r^2$ آن‌گاه:

$$\Rightarrow \begin{cases}\alpha=\frac{5x}{4r} \Rightarrow x=\frac{4}{5}\alpha r\\ \beta=\frac{3y}{4r} \Rightarrow y=\frac{3}{4}\beta r\end{cases} \Rightarrow (\frac{4}{5}\alpha)^2+(\frac{4}{3}\beta)^2=1$$

معادله بیضی با قطرهای $\frac{3}{4}$ و $\frac{5}{4}$ که موازی محورهای y و x نیست.

۸۱- گزینه‌ی «۴» صحیح است.

نشان می‌دهیم که اگر 3 نقطه روی خط راست قرار گیرند آن‌گاه مقدار این نسبت حقیقی است.

$$A=\frac{z-z_1}{z-z_2}\cdot\frac{z_3-z_2}{z_3-z_1}$$ نسبت ناهمساز

$L: ax+by=c$ فرض کنید $\Rightarrow \begin{matrix} z=x+iy \\ z_j=x_j+iy_j \qquad j=1,2,3\end{matrix}$

نقاط z, z_3, z_2, z_1 در روی خط قرار دارند لذا در معادله L صدق می‌کنند.

$$\left.\begin{matrix} ax+by=c \\ ax_j+by_i=c \quad j=1,2,3\end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} a(x-x_j)+b(y-y_i)=\circ \\ j=1,2,3\end{matrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} y-y_j=\frac{-a}{b}(x-x_j)\\ y_i-y_j=\frac{-a}{b}(x_i-x_j)\end{cases}$$

برای $i\neq j$ و $i,j=1,2,3$.

حال:

$$z-z_j=(x+iy)-(x_j+iy_j)$$
$$=(x-x_j)+i(y-y_j)=(x-x_j)+\left(i\frac{-a}{b}(x-x_j)\right)$$

barghnews.com

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} z-z_j=(x-x_j)\left\{1-\frac{a}{b}i\right\} \\ z_i-z_j=(x_i-x_j)\left\{1-\frac{a}{b}i\right\} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{z-z_j}{z_i-z_j}=\frac{x-x_j}{x_i-x_j}\in$$

نسبت ناهمساز نیز حقیقی خواهد بود.

۸۲- گزینه‌ی «۲» صحیح است.

$$z=re^{i\theta} \Rightarrow \log z=\ln|z|+i\arg(z)=\pi i$$
$$\Rightarrow \ln r+i(\theta+2k\pi)=\pi i$$
$$\Rightarrow \begin{cases} \ln r=\circ & r=1\to r=1 \\ \theta+2k\pi=\pi & \theta=\pi-2k\pi=(1-2k)\pi \end{cases} \Rightarrow$$

$$z=re^{i\theta}=1e^{i(1-2k)\pi}=e^{\pi(1-2k)i}$$

۸۳- گزینه‌ی «۱» صحیح است.

$$i^{iz}=e^{iz\log i}=e^{iz(\ln|i|+i\arg i)} \quad , \quad (z=re^{i\theta}=x+iy)$$

$$i^{iz}=e^{iz(\circ+i\times(\frac{\pi}{2}+2k\pi))}=e^{-(\frac{\pi}{2}+2k\pi)z}=e^{-(\frac{\pi}{2}+2k\pi)(x+iy)}$$

$$i^{iz}=e^{(\frac{\pi}{2}+2k\pi)(-x-iy)}=\frac{1}{e^{(\frac{\pi}{2}+2k\pi)(x+iy)}}=\frac{1}{e^{(\frac{\pi}{2}+2k\pi)z}} \qquad k\in$$

$\alpha=e^{(\frac{\pi}{2}+2k\pi)y}$ حقیقی است و شرط حقیقی بودن e^{iz} این است که داشته باشیم:

$$(k'\in \quad)x=2k' \text{ یا } \frac{\pi}{2}x=k'\pi \text{ یا } \sin\frac{\pi}{2}x=\circ$$

پس x که همان قسمت حقیقی z است باید زوج باشد.

۸۴- گزینه‌ی «۱» صحیح است.

$$u+iv=\frac{1}{x+iy}=\frac{x-iy}{x^2+y^2}$$

$$\begin{cases} u=\dfrac{x}{x^2+y^2} \\ v=\dfrac{y}{x^2+y^2} \end{cases}$$

barghnews.com

$$|z-1|=|x+iy-1|=|(x-1)+iy|<1 \Rightarrow (x-1)^2+y^2<1$$

به ترتیب مشابه

$$|z-i|=|x+iy-i|=|x+i(y-1)|<1 \Rightarrow x^2+(y-1)^2<1$$

در نتیجه $\begin{cases} x^2+y^2<2x \\ x^2+y^2<2y \end{cases}$ از طرفی چون در بین این دو دایره $\begin{cases} x>0 \\ y>0 \end{cases}$ است لذا

$$x^2+y^2<2x \Rightarrow u=\frac{X}{x^2+y^2}>\frac{1}{2}$$

$$x^2+y^2<2y \Rightarrow v=\frac{y}{x^2+y^2}>\frac{1}{2}$$

۸۵- گزینه‌ی «۴» صحیح است.

$$|h(z)|<1 \ , \ |z|\le 1$$

چون تابع h در همسایگی نقطه صفر $(|z|<1)$ تحلیلی است و $|h(z)|<1$ تابع h دارای ماکزیمم مقدار است. طبق اصل ماکزیمم مقدار مطلق، تابع h غیرثابت نیست پس $h(z)=C$ که $|C|<1$ و C یک عدد مختلط است. حال h فقط یک نقطه ثابت C دارد که $h(C)=C$ و $|C|<1$.

به عنوان نمونه اگر $h(z)=\frac{z}{2}$ و $|z|<1$ $\qquad D=\{z \,|\, |z|<1\}$

$|h(z)|<\frac{|z|}{2}<\frac{1}{2}<1 \Rightarrow h(0)=0$ صفر نقطه ثابت h است.

۸۶- گزینه‌ی «۲» صحیح است.

تابع f در روی و درون $C:|z|=\frac{1}{2}$ تحلیلی است $f(z)=\frac{e^z}{z^2+1}$

تعمیم فرمول انتگرال کوشی $\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz=\frac{2\pi i f^{(n)}(z)}{n!}$ $z_0=0$

$z_0=0$ صفر مرتبه سوم تابع انتگرالده است.

$$\Rightarrow \int_C \frac{\frac{e^z}{z^2+1}}{z^3}dz=\frac{2\pi i}{2!}f^{(2)}(0)=\pi i f''(0) \qquad (*)$$

$$f(z)=\frac{e^z}{z^2+1} \Rightarrow f'(z)=\frac{e^z(z^2+1)-2ze^z}{(z^2+1)^2}=\frac{e^z(z-1)^2}{(z^2+1)^2}$$

barghnews.com

$$\Rightarrow\ f''(z)=\frac{\left\{e^{z}(z-1)^{2}+2(z-1)e^{z}\right\}(z^{2}+1)^{2}-2(z^{2}+1)(2z)e^{z}(z-1)^{2}}{(z^{2}+1)^{4}}$$

$$\Rightarrow\ f''(\circ)=\frac{1-2}{1^{3}}=-1\ \Rightarrow^{(*)}\ \text{انتگرال}=-\pi i$$

۸۷- گزینه‌ی «۳» صحیح است.

$$\int_{C_1} e^{\bar{z}}dz=\int_{\circ}^{1}e^{x}dx=(e-1)$$

$$z=x+iy\ \xrightarrow{C_1}\begin{cases}z=x\\ dz=dx\end{cases}\ ,\quad \circ\le x\le 1\ ,\ \bar{z}=x$$

$$\int_{C_2} e^{\bar{z}}dz=\int_{\circ}^{1}ie^{-iy}dy=-e^{-iy}\Big]_{\circ}^{1}=-e^{-i}+1$$

$$z=x+iy\xrightarrow{C_2}\begin{cases}z=1+iy\\ \circ\le y\le 1\\ dz=idy\end{cases}$$

$$\int_{C_3} e^{\bar{z}}dz=\int_{1}^{\circ}e^{x-i}dx=e^{-i}(e^{x})\Big]_{1}^{\circ}=e^{-i}(1-e)=e^{-i}-e^{1-i}$$

$$z=x+iy\ \xrightarrow{C_3}z=x+i\ ,\ \circ\le x\le 1\ ,\ dz=dx$$

$$\int_{C_4} e^{\bar{z}}dz=\int_{1}^{\circ}ie^{-iy}dy=-e^{-iy}\Big]_{1}^{\circ}=-1+e^{-i}$$

$$z=x+iy\xrightarrow{C_4}z=iy\ ,\ \circ\le y\le 1\ ,\ dz=idy$$

$$\int_{C} e^{\bar{z}}dz=\int_{C_1} e^{\bar{z}}dz+\int_{C_2} e^{\bar{z}}dz+\int_{C_3} e^{\bar{z}}dz+\int_{C_4} e^{\bar{z}}dz$$
$$=(e-1)+(-e^{-i}+1)+(e^{-i}-e^{1-i})+(-1+e^{-i})\ \Rightarrow\ \int_{C} e^{\bar{z}}dz=e^{-i}(1-e)+e$$

۸۸- گزینه‌ی «۲» صحیح است.

تابع $f(z)=e^{az}$ و دایره واحد $C:|z|=1$ را در نظر بگیرید:

$$|z|=1\ \Rightarrow\ z=e^{ix}\qquad -\pi\le x\le\pi$$

چون $z_{\circ}=\circ$ نقطه درونی دایره واحد C است و تابع f در درون و روی دایره واحد تحلیلی است، لذا:

$$\int_{C}\frac{f(z)}{z-z_{\circ}}dz=2\pi i\,f(z_{\circ})\ \Rightarrow\ \int_{C}\frac{e^{az}}{z}dz=2\pi i\,f(\circ)$$

$$f(z_{\circ})=e^{a\times\circ}=1\ \Rightarrow\ \int_{C}\frac{e^{az}}{z}dz=2\pi i$$

barghnews.com

حال از $z = e^{ix}$ داریم:

$$\begin{cases} dz = ie^{ix}dx = izdx \\ z = \cos x + i\sin x \end{cases}$$

تغییر متغیر می‌دهیم.

$$\int_C \frac{e^{iz}}{z}dz = 2\pi i \Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{a(\cos x + i\sin x)}}{z}(iz\,dx) = 2\pi i$$

$$\Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} e^{a\cos x} \cdot e^{ia\sin x}dx = 2\pi$$

از رابطه دموآر داریم $e^{ia\sin x} = \cos(a\sin x) + i\sin(a\sin x)$

$$\Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} e^{a\cos x}\{\cos(a\sin x) + i\sin(a\sin x)\}dx = 2\pi$$

طرفین دو عدد مختلط هستند از برابری دو عدد مختلط داریم:

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{a\cos x}\cos(a\sin x)dx + i\int_{-\pi}^{\pi} e^{a\cos x}\sin(a\sin x)dx = 2\pi + i\times 0$$

$$\Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} e^{a\cos x}\cos(a\sin x)dx = 2\pi$$

۸۹- گزینه‌ی «۲» صحیح است.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+z}}$$

می‌دانیم سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ به‌ازای αهای حقیقی و $\alpha > 1$ همگراست و به ازای αهای حقیقی و $\alpha \le 1$ واگراست. لذا شرط همگرایی سری به ازای اعداد حقیقی z عبارتست از: $\alpha = 1 + z > 1$ یا $z > 0$. اگر z موهومی محض باشد، $\frac{1}{n^{1+z}} = n^{-(1+z)} = e^{-(1+z)\log n}$ هر مؤلفه حقیقی و موهومی برحسب سینوس و کسینوس است و این سری‌ها واگرا هستند لذا کل سری واگراست.

۹۰- گزینه‌ی «۲» صحیح است.

$$\sin hz = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n+1}}{(n+1)!} = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots$$

$$\frac{1}{\sin hz} = \frac{1}{1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots} = 1 - \frac{1}{3!}z^2 + \left\{\frac{1}{(3!)^2} - \frac{1}{5!}\right\}z^4 + \cdots$$

barghnews.com

روند تقسیم به‌صورت زیر می‌آوریم.

$$
\begin{array}{l|l}
1 & 1+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}+\frac{z^7}{7!} \\ \hline
1+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}+\frac{z^7}{7!}+\cdots & 1-\frac{z^3}{3!}-\frac{z^5}{5!}+\frac{z^6}{(3!)^2}-\frac{z^7}{7!} \\ \hline
-\frac{z^3}{3!}-\frac{z^5}{5!}-\frac{z^7}{7!}-\frac{z^9}{9!} & \\
\frac{-z^3}{3!}-\frac{z^6}{(3!)^2}-\frac{z^8}{3!5!}-\cdots & \\ \hline
\frac{-z^5}{5!}+\frac{z^6}{(3!)^2}-\frac{z^7}{7!}+\frac{z^8}{3!5!}-\frac{z^9}{9!} & \\
\frac{-z^5}{5!}-\frac{z^8}{3!5!}-\frac{z^{10}}{(5!)^2}-\frac{z^{12}}{5!7!} & \\ \hline
\frac{z^6}{(3!)^2}-\frac{z^7}{7!}+\frac{2z^8}{3!5!}-\frac{z^9}{9!}+\frac{z^{10}}{(5!)^2}-\cdots &
\end{array}
$$

۹۱- گزینه‌ی «۳» صحیح است.

می‌دانیم برای مقادیر z که $|z|<1$ داریم: $|z|<1 \Rightarrow \frac{1}{1+z}=1-z+z^2-z^3+z^4-\cdots$

از طرفین سری توانی جمله به جمله انتگرال می‌گیریم خواهیم داشت:

$$\int_C \frac{dz}{1+z}=z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\cdots$$

۹۲- گزینه‌ی «۴» صحیح است.

$1<|z|<2,\ f(z)=2z^5,\ g(z)=-3z^3+z+8$

$$\begin{cases}|f(z)|=2|z|^5=2\times 2^5=64\\ |g(z)|\le 3|z|^3+|z|+8\le 3\times 2^3+2+2=34\end{cases} \Rightarrow |f(z)|\ge|g(z)|$$

بنابه قضیه روشه تعداد صفرهای f و $f+g$ (معادله) در ناحیه $|z|<2$ یکسان است. پس در این ناحیه 5 ریشه وجود دارد.

در ناحیه $|z|<1$ داریم:

$$|z|<1\ \begin{cases}f(z)=8\\ g(z)=2z^5-3z^3+z\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}|g(z)|\le 2+3+1=6\\ |f(z)|=8\end{cases} \Rightarrow |f(z)|\ge|g(z)|$$

barghnews.com

پس بنابه قضیه روشه تعداد صفرهای f و $f+g$ (معادله) در ناحیه $|z|<1$ یکسان است. f ریشه ندارد. پس در حالت کلی در ناحیه $1<|z|<2$ تعداد ریشه‌ها برابر است با $5-\circ=5$.

۹۳- گزینه‌ی «۱» صحیح است.

$z=a$ قطب مرتبه دوم تابع $f(z)=\frac{1}{|z-a|^2}$ است چون $|a|<1$ لذا قطب در داخل مسیر قرار دارد.

$$\operatorname*{Res}_{z=a}\left(f(z)\right)=\frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to a}\frac{d}{dz}\left(\frac{(z-a)^2}{|z-a|^2}\right)=\lim_{z\to a}(\circ)=\circ$$

۹۴- گزینه‌ی «۴» صحیح است.

$f(z)=\frac{z}{1+z^6}\ \Rightarrow$ نقاط تکین $z^6+1=\circ$

قطب‌های ساده‌اند $z_k=e^{i(\frac{2k\pi+\pi}{6})}\ k=\circ,1,2,3,4,5$

نقاط $e^{i\frac{\pi}{6}}$، $e^{i\frac{\pi}{2}}$ و $e^{\frac{5i\pi}{6}}$ در بالای نیم‌صفحه‌اند.

$$B_1=\operatorname*{Res}_{z=e^{\frac{i\pi}{6}}}\left(f(z)\right)=\left.\frac{z}{6z^5}\right|_{z=e^{\frac{i\pi}{6}}}$$

$B_1=\frac{1}{6}z^{-4}\Big|_{z=e^{\frac{i\pi}{6}}}=\frac{1}{6}e^{\frac{-2\pi}{3}i}$ به همین ترتیب $B_2=\frac{1}{6}z^{-4}\Big|_{z=e^{\frac{i\pi}{2}}}=\frac{1}{6}e^{-2\pi i}=\frac{1}{6}$

$$B_3=\frac{1}{6}z^{-4}\Big|_{z=e^{\frac{5i\pi}{6}}}=\frac{1}{6}e^{\frac{-10\pi i}{3}}=\frac{1}{6}e^{\frac{2\pi i}{3}}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}B_1+B_3=\frac{1}{6}\left\{\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}+\cos\frac{2\pi}{3}-i\sin\frac{2\pi}{3}\right\}\\ B_1+B_3=\frac{-1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{-1}{6}\ \Rightarrow\ B_1+B_2+B_3=\circ\end{cases}$$

$\Rightarrow$ انتگرال $=2\pi i(B_1+B_2+B_3)=2\pi i(-\frac{1}{6}+\frac{1}{6})=\circ$

barghnews.com