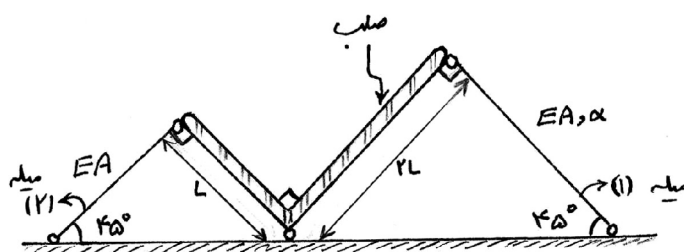


## مقاومت مصالح - تحلیل سازه ها

۱- در شکل مقابل دمای میله <sup>(۱)</sup> به اندازه  $\Delta t$  افزایش می یابد. تنش محوری ایجاد شده در آن کدام است؟ (سطح مقطع میله <sup>(۱)</sup> برابر A است)



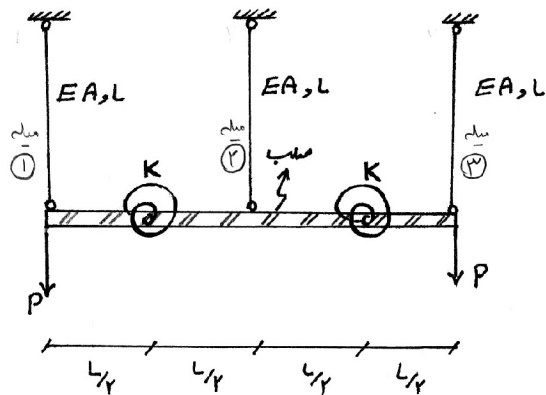
$$\sigma = \frac{4}{5} E \alpha \Delta t \quad (۱)$$

$$\sigma = \frac{2}{3} E \alpha \Delta t \quad (۲)$$

$$\sigma = \frac{4}{3} E \alpha \Delta t \quad (۳)$$

$$\sigma = \frac{1}{3} E \alpha \Delta t \quad (۴)$$

۲- در شکل مقابل نیروی میله ۳ کدام است؟  $k = EAL$



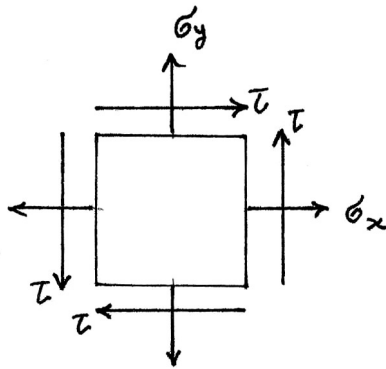
(۱)  $\frac{4}{13}P$

(۲)  $\frac{9}{13}P$

(۳)  $\frac{6}{17}P$

(۴)  $\frac{11}{17}P$

۳- در المان شکل مقابل در صفحه‌ای که برش ماکزیمم رخ می‌دهد تنش قائم برابر ۳۵ است. اگر  $\sigma_{\max} = 6\sigma_{\min}$  باشد تنش اصلی ماکزیمم کدام است؟



(۱) ۴۰

(۲) ۳۰

(۳) ۶۰

(۴) ۷۰

۴- استوانه جدار نازکی به قطر  $D$ ، طول  $L$  و ضخامت  $t$  که در دو انتها مسدود است، تحت فشار داخلی یکنواخت  $(P)$

قرار گرفته است. اگر تغییر طول استوانه برابر  $\frac{1}{1000}L$  باشد، فشار داخلی  $P$  چند برابر  $\frac{tE}{D}$  می‌باشد؟ (مدول الاستیسیته

مخزن  $E$  و ضریب پواسن آن  $\nu = \frac{1}{3}$  است)

(۱) ۰.۰۰۶      (۲) ۰.۰۰۸      (۳) ۰.۰۱۲      (۴) ۰.۰۱۶

۵- در شکل مقابل عضو (۱) کاملاً صلب فرض می‌شود. نیروی ایجاد شده در میله (۲) کدام است؟

	<p>(۱) <math>P</math></p> <p>(۲) <math>\frac{\sqrt{3}}{2}P</math></p> <p>(۳) <math>\frac{\sqrt{2}}{2}P</math></p> <p>(۴) <math>\frac{1}{2}P</math></p>
--	--

۶- بارهای  $P$  را به سیستم نشان داده شده وارد می‌کنیم تا میله به طول  $20.02 \text{ cm}$  و به سطح مقطع  $20 \text{ cm}^2$  بتواند آزادانه بین قطعات صلب (به صورت متقارن) قرار بگیرد. بعد از جایگذاری میله و حذف بارهای  $P$ ، تنش ایجاد شده در میله

میانمی چند  $\frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$  است؟

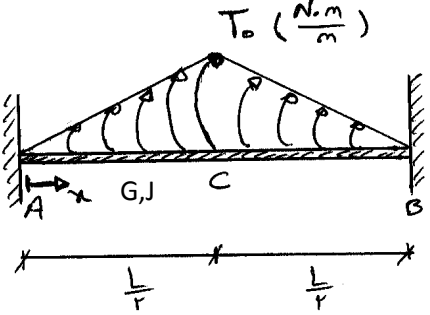
$$\left( E = 2 \times 10^6 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} \right)$$

	<p>(۱) 750</p> <p>(۲) 1500</p> <p>(۳) 2000</p> <p>(۴) 1000</p>
--	--

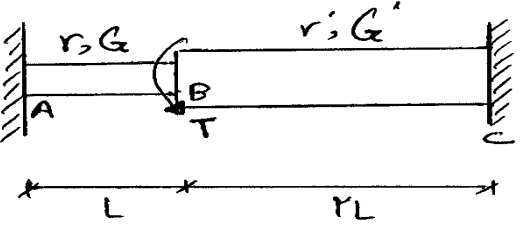
۷- مصالح به کار رفته برای ساخت مقاطع (۱) و (۲)، یکسان می‌باشند. اگر سطح مقطع دو قطعه با هم برابر باشد، نسبت ظرفیت پیچشی مقطع لوله (۱) به ظرفیت پیچشی مقطع میله (۲) کدام است؟

<p>(۱)                      (۲)</p>	<p>(۱) ۶</p> <p>(۲) ۳</p> <p>(۳) ۱۸</p> <p>(۴) ۱۲</p>
-------------------------------------	---

۸ - دوران مقطع وسط تیر AB، کدام است؟ ( $\varphi_c = ?$ ) مقطع میله، دایره توپر به شعاع  $a$  می باشد و لنگر پیچشی گسترده در طول AC و BC به صورت خطی تغییر می کند.

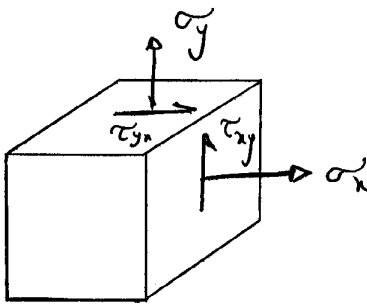
	$\frac{7T_0 L^2}{48GJ} \quad (۲)$ $\frac{T_0 L^2}{6GJ} \quad (۴)$ $\frac{T_0 L^2}{8GJ} \quad (۱)$ $\frac{T_0 L^2}{12GJ} \quad (۳)$
---	--

۹ - تیر ABC با مقطع دایروی تحت اثر لنگر پیچشی  $T$  در B قرار دارد. اگر تنش برشی حداکثر ایجاد شده در هر دو قطعه با هم برابر باشد، کدام رابطه صحیح است؟ شعاع و مدول برشی هر دو قطعه روی آن مشخص شده است.

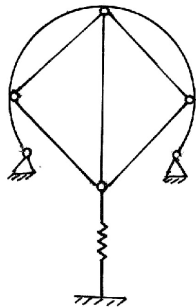
	$\frac{G'}{G} = \frac{2r'}{r} \quad (۱)$ $\frac{G'}{G} = \frac{r'}{2r} \quad (۲)$ $\frac{G'}{G} = \frac{2r}{r'} \quad (۳)$ $\frac{G'}{G} = \frac{r}{2r'} \quad (۴)$
--	---

۱۰ - در المان شکل مقابل، کرنش برشی ماکزیمم کدام است؟

(می دانیم:  $E = 240 \text{ GPa}$  ،  $\nu = 0.2$  ،  $\gamma_{xy} = 200 \mu$  ،  $\epsilon_y = 100 \mu$  ،  $\epsilon_x = 300 \mu$ )

	$280 \mu \quad (۱)$ $140 \mu \quad (۲)$ $440 \mu \quad (۳)$ $225 \mu \quad (۴)$
---	---

۱۱- درجه نامعینی سازه پایدار مقابل کدام است؟



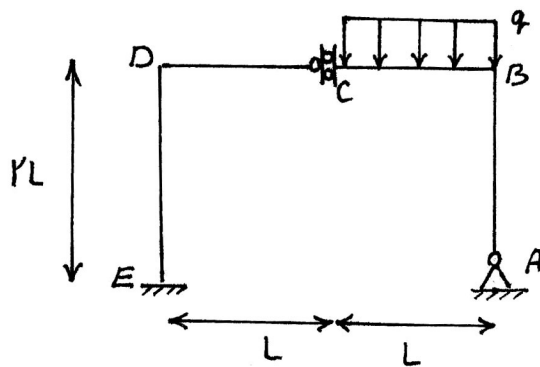
(۱) پنج

(۲) شش

(۳) هفت

(۴) هشت

۱۲- در شکل مقابل عکس العمل افقی تکیه‌گاه E کدام است؟



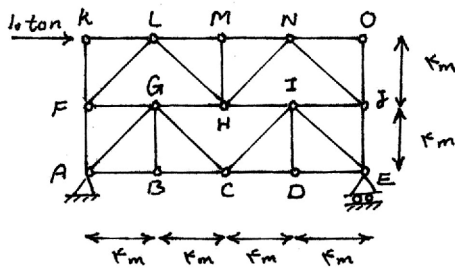
(۱)  $qL$

(۲)  $\frac{1}{2}qL$

(۳)  $\frac{1}{4}qL$

(۴) سازه نامعین بوده و نمی‌توان آن را به دست آورد.

۱۳- نیرو در عضو CG از خرابای شکل مقابل کدام است؟



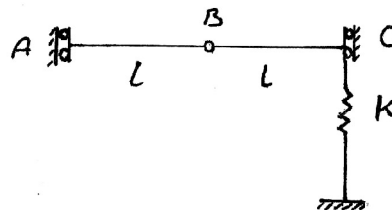
(۱)  $10\sqrt{2}$

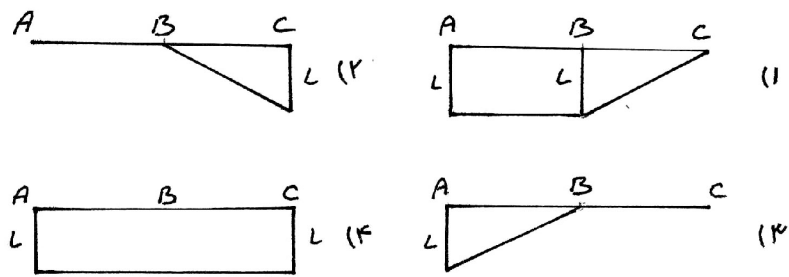
(۲)  $20\sqrt{2}$

(۳)  $2.5\sqrt{2}$

(۴)  $5\sqrt{2}$

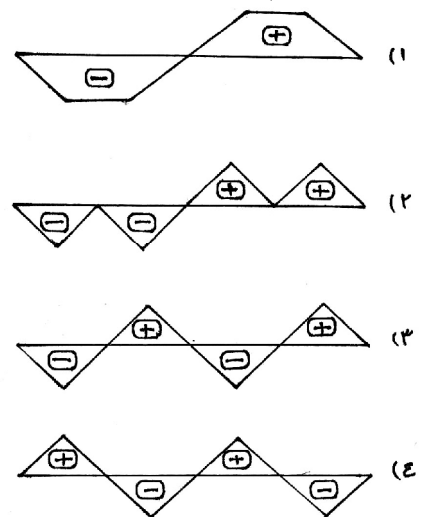
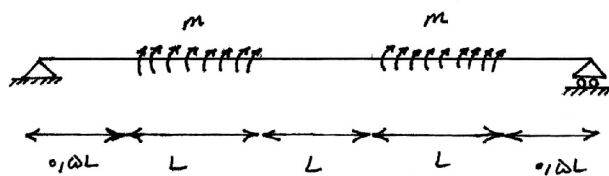
۱۴- خط تاثیر لنگر تکیه‌گاه C کدام است؟



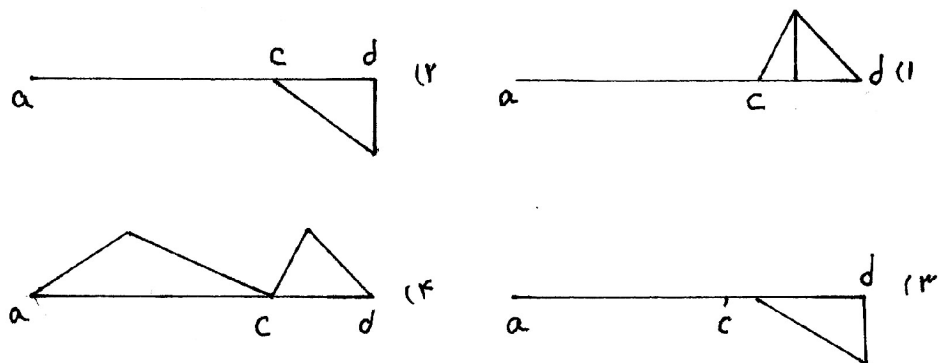
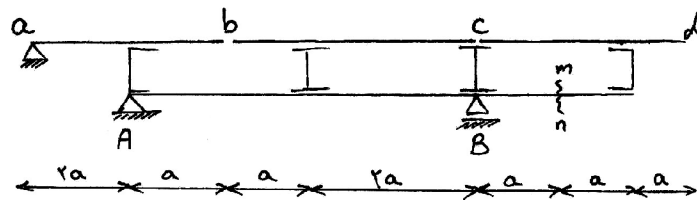


۱۵- در شکل مقابل لنگر خمشی گسترده  $m$  بر قسمت‌های نشان داده از تیر اثر می‌کند نمودار لنگر خمشی در این تیر

کدام است؟



۱۶- خط تاثیر لنگر در مقطع  $m-n$  کدام است؟ (بار واحد در قسمت  $ad$  حرکت می‌کند).



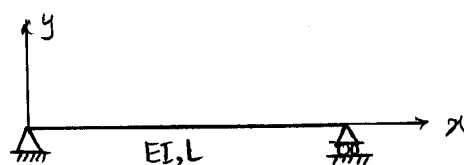
۱۷- نیروی فنر کدام یک از گزینه‌های زیر است؟

	(۱) $2P$
	(۲) $1.5P$
	(۳) $10P$
	(۴) بستگی به سختی فنر دارد.

۱۸- درجه نامعینی سیستم مقابل کدام است؟

	(۱) ۵	(۲) ۶
	(۳) ۷	(۴) ۸

۱۹- چنانچه معادله تغییر مکان تیر به صورت  $y(x) = -\frac{q_0 L^4}{\pi^4 EI} \sin \frac{\pi x}{L}$  باشد، دیاگرام نیروی برشی در تیر کدام است؟



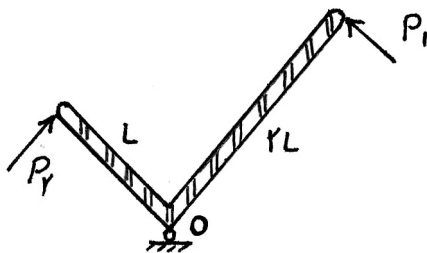
(۱)		(۲)	
(۳)		(۴)	

۲۰- نیروی میله AB کدام یک از گزینه‌های زیر است؟

	<p>(۱) <math>\frac{\sqrt{2}}{6} qa</math></p> <p>(۲) <math>\frac{\sqrt{2}}{2} qa</math></p> <p>(۳) <math>\frac{\sqrt{2}}{3} qa</math></p> <p>(۴) <math>\frac{2\sqrt{2}}{3} qa</math></p>
--	--



۱ - گزینه ۴ صحیح می باشد.



$$\sum M_O = 0$$

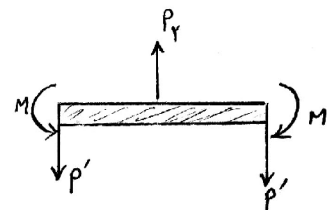
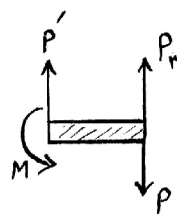
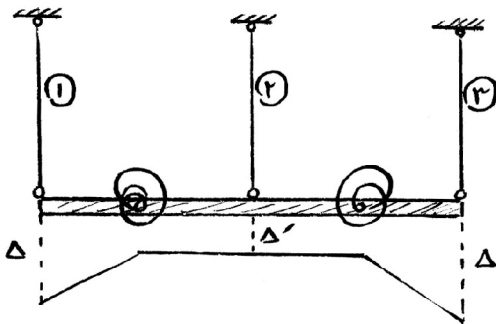
$$P_1 \times 2L = P_2 \times L \rightarrow P_2 = 2P_1$$

اگر تغییر طول میله (۲) برابر  $\Delta_2$  باشد تغییر طول میله (۱) برابر  $2\Delta_2$  است (چرا؟) و داریم:

$$\begin{cases} \Delta_1 = 2L\alpha\Delta T - \frac{P_1 \times 2L}{EA} \\ \Delta_2 = \frac{P_2 L}{AE} = \frac{2P_1 L}{EA} \end{cases} \rightarrow \Delta_1 = 2\Delta_2 \rightarrow P_1 = \frac{1}{3} EA \alpha \Delta T$$

$$\sigma_1 = \frac{P_1}{A} = \frac{1}{3} E \alpha \Delta T$$

۲ - گزینه ۲ صحیح می باشد.



$$\begin{cases} P' + P_3 = P \\ P' \times \frac{L}{2} = M = k\theta = K \frac{\Delta - \Delta'}{\frac{L}{2}} = K \frac{2(\Delta - \Delta')}{L} \end{cases} \quad (1)$$

$$\Delta' = \frac{2P'L}{EA}, \quad \Delta = \frac{P_3 L}{EA} \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1), (2)} \frac{P'L}{2} = EAL \times \frac{2}{L} \left( \frac{P_3 L - 2P'L}{EA} \right)$$

$$\rightarrow P' = 4P_3 - 8P' \rightarrow P' = \frac{4}{9}P_3 \xrightarrow{P'+P_3=P} P_3 = \frac{9}{13}P, \quad P' = \frac{4}{13}P$$

۳- گزینه ۳ صحیح می باشد.

با توجه به دایره مورالمان می توان نشان داد در صفحه ای که تنش برشی ماکزیمم است تنش قائم  $\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$  است و همچنین حاصل  $\sigma_{\max} + \sigma_{\min} = \sigma_x + \sigma_y$  است.

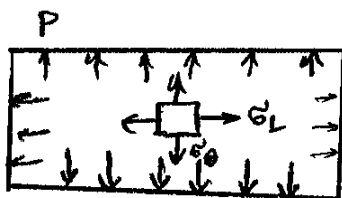
$$\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = 35 \rightarrow \sigma_x + \sigma_y = 70$$

$$\sigma_{\max} + \sigma_{\min} = 70 \rightarrow 6\sigma_{\min} + \sigma_{\min} = 70 \rightarrow \sigma_{\min} = 10$$

$$\sigma_{\max} = 60$$

۴- گزینه ۳ صحیح می باشد.

با توجه به مقادیر تنش های طولی و مماسی، کرنش طولی در استوانه عبارت است از:



$$\sigma_L = \frac{pR}{2t} = \frac{PD}{4t}, \quad \sigma_\theta = \frac{pR}{t} = \frac{PD}{2t}$$

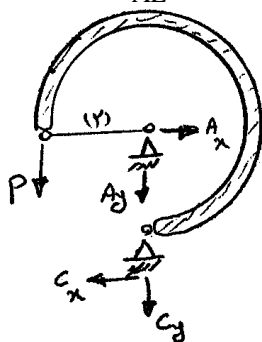
$$\Delta L = \epsilon_L \times L = \left( \frac{\sigma_L}{E} - \nu \frac{\sigma_\theta}{E} \right) \times L = \left( \frac{PD}{4t} - \nu \frac{PD}{2t} \right) \times \frac{L}{E}$$

$$0.001L = \frac{PD}{tE} \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{6} \right) \times L \rightarrow P = 0.012 \frac{tE}{D}$$

۵- گزینه ۱ صحیح می باشد.

با توجه به شکل، عضو شماره (۳) به دو سر جسم متصل بوده و نیرو و تغییر طول آن صفر است. حال با توجه به شکل زیر می توان نوشت:

$$\Delta_3 = 0 \rightarrow \frac{F_3 L_3}{AE} = 0 \rightarrow F_3 = 0$$

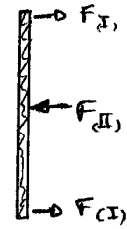
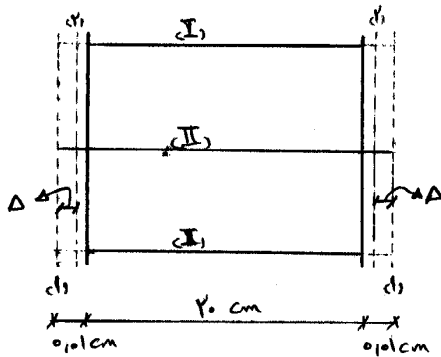


$$\sum M_C = 0 \rightarrow p \times R - A_x \times R = 0 \rightarrow A_x = P$$

نیروی داخلی ایجاد شده در میله (۲) با عکس العمل تکیه گاه A یکسان است.

۶- گزینه ۴ درست است.

فرض کنید لحظه ای قبل از برداشتن نیروهای P، صفحات صلب در موقعیت (۱) و بعد از برداشتن نیروها، این صفحات در موقعیت (۲) قرار بگیرند. در این صورت می توان نوشت:



تکامل و تعادل:  $F_{CI} = \frac{1}{2} F_{II}$

$$\Delta_{(I)} = 2 \times (0.01 - \Delta) = 0.02 - 2\Delta \Rightarrow \frac{F_I L}{EA_I} = 0.02 - 2\Delta$$

$$\Delta_{(II)} = 2 \times \Delta = 2\Delta \Rightarrow \frac{F_{II} L}{EA_{II}} = 2\Delta \quad (1)$$

$$F_I = \frac{1}{2} F_{II}, \quad A_I = \frac{1}{2} A_{II} \Rightarrow \frac{\frac{1}{2} F_{II} L}{E \left( \frac{1}{2} A_{II} \right)} = 0.02 - 2\Delta \Rightarrow \frac{F_{II} L}{EA_{II}} = 0.02 - 2\Delta \quad (2)$$

$$\text{از (۱) و (۲)} \Rightarrow 2\Delta = 0.02 - 2\Delta \Rightarrow \Delta = 5 \times 10^{-3} \text{ cm}$$

$$\frac{F_{II} L}{EA_{II}} = 2\Delta = 2 \times 5 \times 10^{-3} = 10^{-2} \Rightarrow \frac{F_{II}}{A_{II}} = \frac{2 \times 10^6 \times 10^{-2}}{20}$$

$$\Rightarrow \sigma_{(II)} = 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$$

۷ - گزینه ۱ درست است.

ظرفیت پیچشی یک مقطع، حداکثر لنگر پیچشی است که می‌توان به آن مقطع اعمال کرد تا تنش برشی ماکزیمم مقطع به تنش برشی مجاز مصالح آن برسد. مقاطع (۱) و (۲) به علت یکسان بودن مصالح، این تنش برشی مجاز با هم برابر است:

$$(۱) \text{ ظرفیت پیچشی: } T_1 = \tau_{\text{all}} (2A_m t)_1$$

$$\Rightarrow \frac{T_1}{T_2} = \frac{(2A_m t)_1}{\left( \frac{J}{a} \right)_2}$$

$$(۲) \text{ ظرفیت پیچشی: } T_2 = \tau_{\text{all}} \left( \frac{J}{a} \right)_2$$

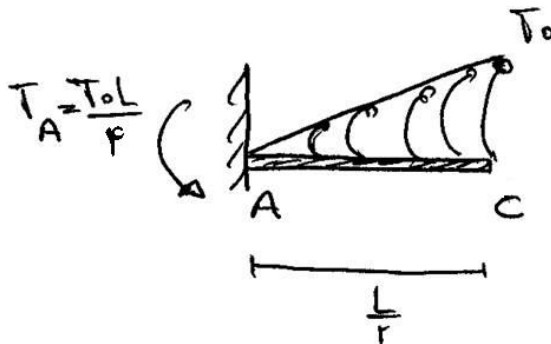
$$A_1 = A_2 \Rightarrow 2\pi r t = \pi a^2 \xrightarrow{t = \frac{r}{18}} \frac{r^2}{9} = a^2 \Rightarrow r = 3a$$

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{2\pi r^2 t a}{\frac{\pi a^4}{2}} = \frac{4 \times (3a)^2 \times \frac{3a}{18}}{a^3} = 6$$

۸ - گزینه ۳ درست است.

با توجه به تقارن شکل، عکس العمل تکیه گاه های A و B برابر است با :

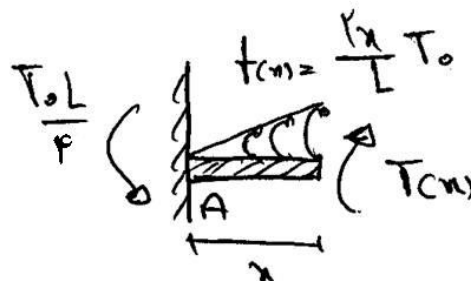
$$T_A = T_B = \frac{1}{2}(A_T) = \frac{1}{2} \times \frac{T_0 \times L}{2} = \frac{T_0 L}{4}$$



اکنون عضو AC را به صورت مقابل در نظر می گیریم:

$$\phi_C = \int_0^{\frac{L}{2}} \frac{T_{(x)}}{GJ} dx$$

برای یافتن  $T_{(x)}$ ، مقطعی به فاصله x از A در نظر می گیریم:



$$T_{(x)} = \frac{T_0 L}{4} - \int_0^x t_{(x)} dx = \frac{T_0 L}{4} - \int_0^x \frac{2x}{L} T_0 dx$$

$$T_{(x)} = \frac{T_0 L}{4} - \frac{x^2}{L} T_0$$

$$\phi_C = \int_0^{\frac{L}{2}} \frac{\frac{T_0 L}{4} - \frac{x^2}{L} T_0}{GJ} dx = \frac{T_0}{GJ} \left( \frac{Lx}{4} - \frac{x^3}{3L} \right) \bigg|_0^{\frac{L}{2}}$$

$$\phi_C = \frac{T_0 L^2}{12 GJ}$$

۹ - گزینه ۳ درست است.

لنگر پیچشی T به نسبت سختی پیچشی اعضا، بین آنها توزیع می شود.

$$\begin{cases} T_{AB} = T \times \frac{(\frac{GJ}{L})_{AB}}{(\frac{GJ}{L})_{AB} + (\frac{GJ}{L})_{BC}} \\ T_{BC} = T \times \frac{(\frac{GJ}{L})_{BC}}{(\frac{GJ}{L})_{AB} + (\frac{GJ}{L})_{BC}} \end{cases} \Rightarrow \frac{T_{AB}}{T_{BC}} = \frac{(\frac{GJ}{L})_{AB}}{(\frac{GJ}{L})_{BC}} \quad (I)$$

$$\tau_{\max AB} = \tau_{\max BC} \Rightarrow \left( \frac{Tr}{J} \right)_{AB} = \left( \frac{Tr}{J} \right)_{BC} \Rightarrow \frac{T_{AB}}{T_{BC}} = \frac{(\frac{r}{J})_{BC}}{(\frac{r}{J})_{AB}} \quad (II)$$

$$\text{از (I) و (II)} \Rightarrow \frac{(\frac{GJ}{L})_{AB}}{(\frac{GJ}{L})_{BC}} = \frac{(\frac{r}{J})_{BC}}{(\frac{r}{J})_{AB}} \Rightarrow \left( \frac{Gr}{L} \right)_{BC} = \left( \frac{Gr}{L} \right)_{AB} \Rightarrow \left( \frac{Gr'}{2L} \right) = \left( \frac{Gr}{L} \right) \Rightarrow \left( \frac{G'}{G} \right) = \left( \frac{2r}{r'} \right)$$

۱۰ - گزینه ۳ درست است.

ابتدا تنش های  $\sigma_x$  و  $\sigma_y$  و  $\tau_{xy}$  را برای این المان می یابیم. توجه شود که به علت صفر بودن  $\sigma_z$ ، روابط زیر بین تنش ها و کرنش ها در دو راستای x و y، همچنان برقرار است:

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_x + \nu \epsilon_y) = \frac{240 \times 10^3}{0.96} \times (300 \times 10^{-6} + 0.2 \times 100 \times 10^{-6}) = 80 \text{ (MPa)} \\ \sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_y + \nu \epsilon_x) = \frac{240 \times 10^3}{0.96} \times (100 \times 10^{-6} + 0.2 \times 300 \times 10^{-6}) = 40 \text{ (MPa)} \end{cases}$$

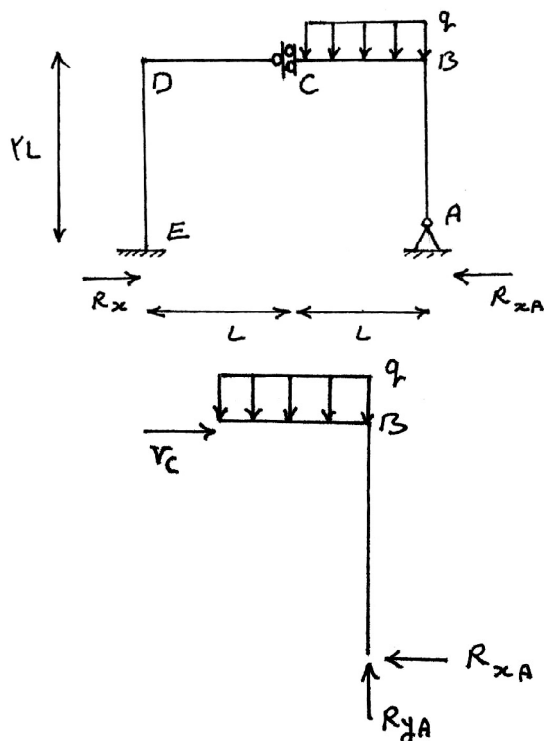
$$\tau_{xy} = \gamma G = \gamma \times \frac{E}{2(1+\nu)} = 200 \times 10^{-6} \times \frac{240 \times 10^3}{2 \times 1.2} = 20 \text{ (MPa)}$$

۱۱- گزینه ۱ صحیح می باشد.

$$\begin{cases} \text{تعداد کادر بسته} = 4 \\ \text{تعداد قیدهای تکیه گاهی} = 5 \\ \text{تعداد معادلات شرط} = 9 \end{cases} \rightarrow r = 4 \times 3 + 5 - 9 - 3 = 5$$

۱۲- گزینه ۳ صحیح می باشد.

می دانیم در C تنها قیدی که وجود دارد یک قید افقی است به عبارتی در C ممان و برش هر دو صفر است.



$$\sum F_x = 0 \\ R_{xA} = R_{xE}$$

$$\sum M_B = 0 \\ R_{xA} \times 2L = \frac{qL^2}{2} \\ R_{xA} = \frac{qL}{4}$$

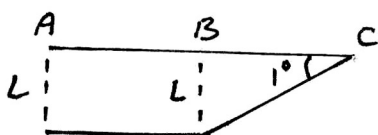
۱۳- گزینه ۳ صحیح می باشد.

با زدن یک برش افقی گذرنده از قسمت فوقانی خرپا و با توجه به صفر بودن نیروی اعضای BG و DI و با نوشتن معادله تعادل قائم در مفصل های G، I و C ملاحظه می گردد نیرو در اعضای AG، GC، CI و IE برابر می باشد بنابراین خواهیم داشت:

$$4F_{CG} \cos 45^\circ = 10 \Rightarrow F_{CG} = 2.5\sqrt{2}$$

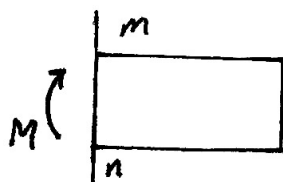
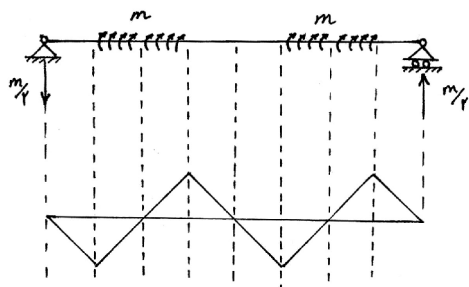
۱۴- گزینه ۱ صحیح می باشد.

با استفاده از روش مولر برسلو و ایجاد دوران واحد در تکیه گاه C گزینه ۱ صحیح است.



۱۵- گزینه ۳ صحیح می باشد.

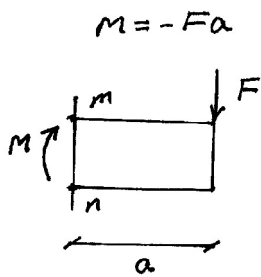
این سازه دارای بارگذاری پادمتقارن است و لنگر در وسط آن صفر است و با توجه به عکس العمل تکیه گاه های A و B نمودار لنگر مطابق شکل زیر است.



۱۶- گزینه ۲ صحیح می باشد.  
اگر بار واحد از a تا c حرکت کند مطابق

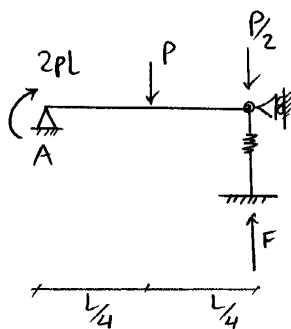
لنگر مقطع m-n صفر می گردد و در صورتی که بار از c تا d حرکت نماید داریم:

$$M = -Fa$$



۱۷- گزینه ۳ درست است.

چون سیستم معین است نیروی فنر به سختی سیستم بستگی ندارد و با معادلات تعادل می توان نیروی فنر را به دست آورد.  
چون سیستم متقارن است می توان سازه نیمه را تحلیل کرد.

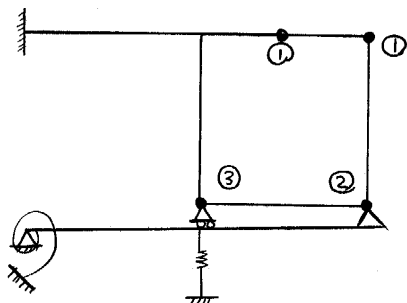


$$\begin{aligned} \sum M_A = 0 &\rightarrow 2PL + P \times \frac{L}{4} + \frac{P}{2} \times \frac{L}{2} = F \times \frac{L}{2} \\ &\Rightarrow F = 5P \\ &\Rightarrow F_s = 2 \times 5P = 10P \end{aligned}$$

نکته: در سازه متقارن با بارگذاری متقارن واکنش قائم در تکیه گاه میانی روی محور تقارن در سازه اصلی دو برابر سیستم نیمه می باشد.

۱۸- گزینه ۲ درست است.

در کابل و فنر داخلی همواره یک نیروی داخلی به صورت مجهول وجود دارد، همچنین در فنر پیچشی داخلی نیز همواره یک لنگر به صورت مجهول وجود دارد لذا می توان آنها را از سیستم حذف نمود و ۳ واحد به درجات نامعینی سیستم افزود.



$$DI = 3 + (3 \times 8 + 7) - (3 \times 7 + 7) = 6$$

$$M = 8, R = 7, N = 7, C = 7$$

۱۹- گزینه ۲ درست است.

$$V(x) = EIy'''(x)$$

$$y'(x) = -\frac{q_0 L^4}{\pi^4 EI} \times \frac{\pi}{L} \times \left( \cos \frac{\pi x}{L} \right)$$

$$y''(x) = -\frac{q_0 L^4}{\pi^4 EI} \times \frac{\pi^2}{L^2} \times \sin \frac{\pi x}{L}$$

$$y'''(x) = -\frac{q_0 L^4}{\pi^4 EI} \times \frac{\pi^3}{L^3} \times \cos \frac{\pi x}{L} = \frac{q_0 L}{\pi EI} \times \cos \frac{\pi x}{L}$$

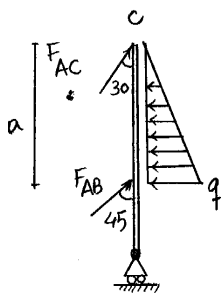
$$\Rightarrow V(x) = \frac{q_0 L}{\pi} \cos \frac{\pi x}{L}$$

$$x = 0 \rightarrow V(x) = \frac{q_0 L}{\pi}$$

$$x = L \rightarrow V(x) = \frac{-q_0 L}{\pi}$$

$$x = \frac{L}{2} \rightarrow V(x) = 0$$

۲۰- گزینه ۳ درست است.



$$\sum M_c = 0 \rightarrow F_{AB} \sin 45^\circ \times a = q \times \frac{a}{2} \times \frac{2a}{3}$$

$$\Rightarrow F_{AB} = \frac{\sqrt{2}}{3} qa$$