

سیستم های کنترل خطی

۱- معادلات حالت سیستمی به صورت $\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mathbf{u}$ در نظر بگیرید. فیدبک حالت $\mathbf{u} = -\mathbf{k}\mathbf{x}$ چنان طراحی شده است

که قطب های حلقه بسته در $s = -\frac{\sqrt{2}}{2} \pm j\frac{\sqrt{2}}{2}$ جایابی شوند. بردار \mathbf{k} کدام گزینه است؟

(۱) $\mathbf{k} = \begin{bmatrix} 3 & 3 + \sqrt{2} \end{bmatrix}$

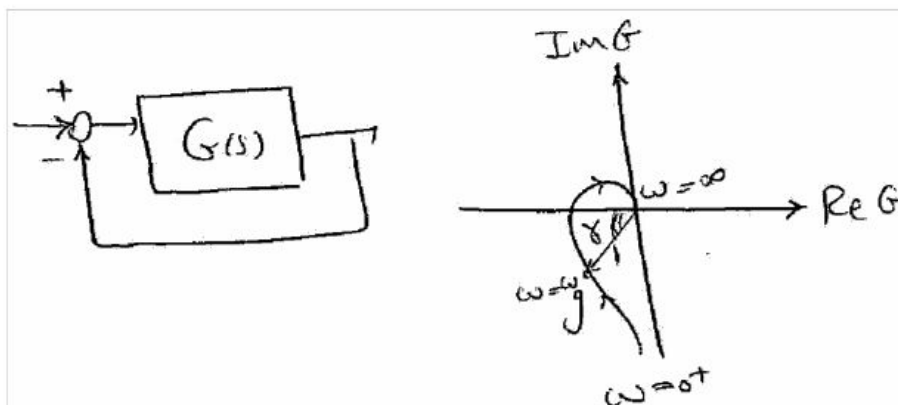
(۲) $\mathbf{k} = \begin{bmatrix} 1 & 3 - \sqrt{2} \end{bmatrix}$

(۳) $\mathbf{k} = \begin{bmatrix} 4 & 3 - \sqrt{2} \end{bmatrix}$

(۴) بردار \mathbf{k} نمی توان یافت چون سیستم کنترل پذیر حالت نیست

۲- سیستم کنترل شکل زیر را در نظر بگیرید. اگر نمودار قطبی $G(s)$ به صورت شکل داده شده باشد و $S(s)$ تابع تبدیل

حساسیت سیستم باشد، کدام گزینه صحیح است؟ ($G(s)$ حداقل فاز و $|G(0)| > 1$ فرض شود)



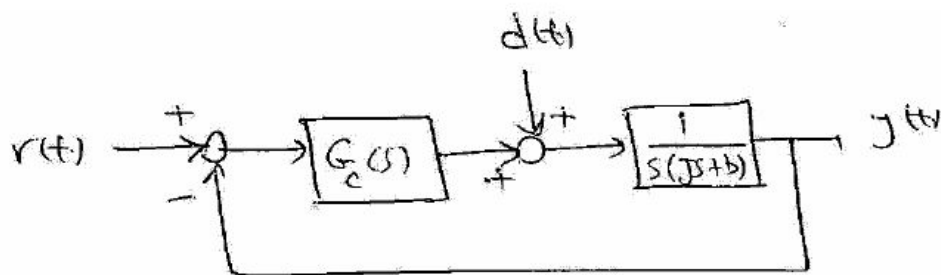
(۲) $|S(j\omega_g)| = \frac{1}{2\sqrt{1+\cos\gamma}}$

(۱) $|S(j\omega_g)| = \frac{1}{2\sqrt{1-\cos\gamma}}$

(۴) $|S(j\omega_g)| = \frac{1}{\sqrt{2\left(1-\frac{1}{2}\cos\gamma\right)}}$

(۳) $|S(j\omega_g)| = \frac{1}{\sqrt{2(1-\cos\gamma)}}$

۳- در سیستم کنترل شکل زیر برای آنکه اثر ورودی اغتشاش پله در خروجی صفر شود کدام کنترلر مناسب است؟



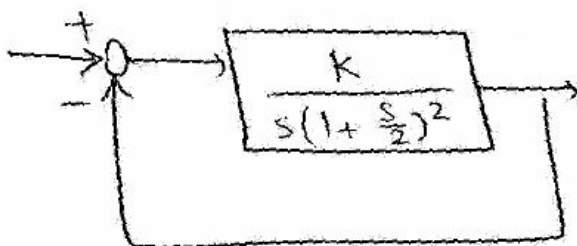
P (۱)

PI (۲)

PD (۳)

Lag (۴)

- ۴- در سیستم کنترل زیر k چنان انتخاب شده که حد بهره برابر 6 db شود. خطای حالت ماندگار سیستم به ورودی $r(t) = (2t + 3)u(t)$ کدام است؟



- (۱) $\frac{1}{2}$
(۲) ۱
(۳) ۲
(۴) بی‌نهایت

- ۵- معادلات حالت سیستمی به صورت زیر است که u ورودی پله واحد است. پاسخ حالت ماندگار سیستم به این ورودی کدام است؟

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $-\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) ۱

- ۶- نمایش فضای حالت سیستمی به صورت $\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \\ \mathbf{y} = \mathbf{Cx} \end{cases}$ داده شده است. اگر متغیرهای حالت جدیدی به صورت $\mathbf{z} = \mathbf{Mx}$ انتخاب کنیم معادلات حالت جدید به کدام صورت خواهند شد؟ (\mathbf{M} ماتریس ناویژه است)

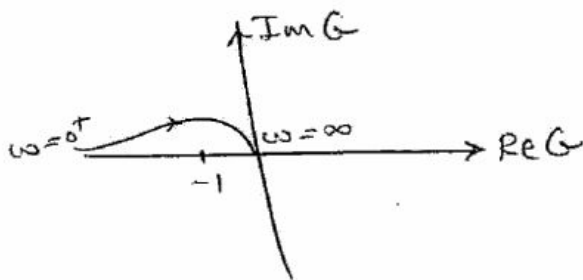
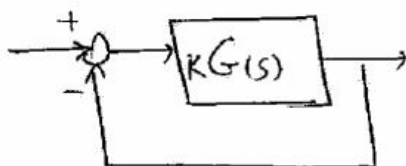
$$\begin{cases} \dot{\mathbf{z}} = \mathbf{MAM}^{-1}\mathbf{z} + \mathbf{MBu} \\ \mathbf{y} = \mathbf{CM}^{-1}\mathbf{z} \end{cases} \quad (۲)$$

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{z}} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{AMz} + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{Bu} \\ \mathbf{y} = \mathbf{MCz} \end{cases} \quad (۱)$$

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{z}} = \mathbf{MAM}^{-1}\mathbf{z} + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{Bu} \\ \mathbf{y} = \mathbf{CMz} \end{cases} \quad (۳)$$

(۴) هیچ کدام

- ۷- سیستم کنترل شکل زیر را در نظر بگیرید. اگر نمودار قطبی $G(s)$ به صورت شکل داده شده باشد، کدام گزینه صحیح نیست ($G(s)$ حداقل فاز است)



- (۱) خطای حالت دایمی به ورودی شیب واحد برابر صفر است.
(۲) حد فاز سیستم مثبت است.
(۳) مکان هندسی ریشه‌های $G(s)$ به ازای $k > 0$ همواره یک شاخه سمت راست دارد.
(۴) هر سه گزینه

۸- اگر q و ω به ترتیب محل برخورد نمودار نایکوئیست و فرکانس برخورد آن با محور حقیقی باشند این مقادیر برای سیستم

$$G(s) = \frac{s+2}{s^2(s+4)(s+5)} \text{ کدام است؟}$$

$$q = -\frac{1}{\lambda}, \quad \omega = 2 \quad (2)$$

$$q = -\frac{1}{\lambda\lambda}, \quad \omega = \sqrt{2} \quad (1)$$

$$q = -\frac{1}{\lambda\lambda}, \quad \omega = 2 \quad (4)$$

$$q = -\frac{1}{\lambda\lambda}, \quad \omega = \sqrt{2} \quad (3)$$

۹- اگر $\varphi(t)$ ماتریس انتقال حالت سیستمی با معادلات حالت $\dot{X} = Ax + Bu$ باشد و داشته باشیم

$$\varphi^{-1}(t) = \begin{bmatrix} e^{2t} \cos t - 2e^{2t} \sin t & -e^{2t} \sin t \\ \Delta e^{2t} \sin t & e^{2t} \cos t + 2e^{2t} \sin t \end{bmatrix}$$

ماتریس A کدام است؟

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\Delta & -4 \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -\Delta \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \quad (1)$$

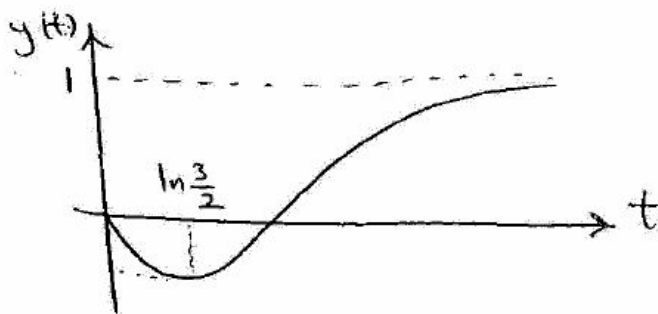
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -2 \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

۱۰- معادلات حالت سیستمی به صورت زیر است. اگر به ازای ورودی $u = u(t)$ خروجی $y(t)$ به صورت زیر باشد، a و b کدام است؟

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} a \\ 2 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 4 & b \end{bmatrix} x$$



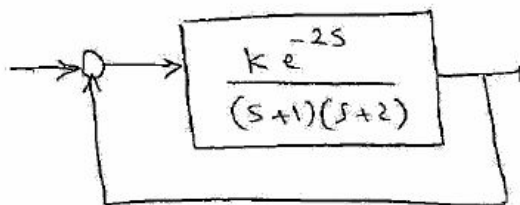
$$b = -3, \quad a = 1 \quad (2)$$

$$b = +3, \quad a = 1 \quad (1)$$

$$b = -3, \quad a = -1 \quad (4)$$

$$b = 3, \quad a = -1 \quad (3)$$

۱۱- کدام گزینه در مورد مکان هندسی ریشه های سیستم کنترل زیر صحیح است؟



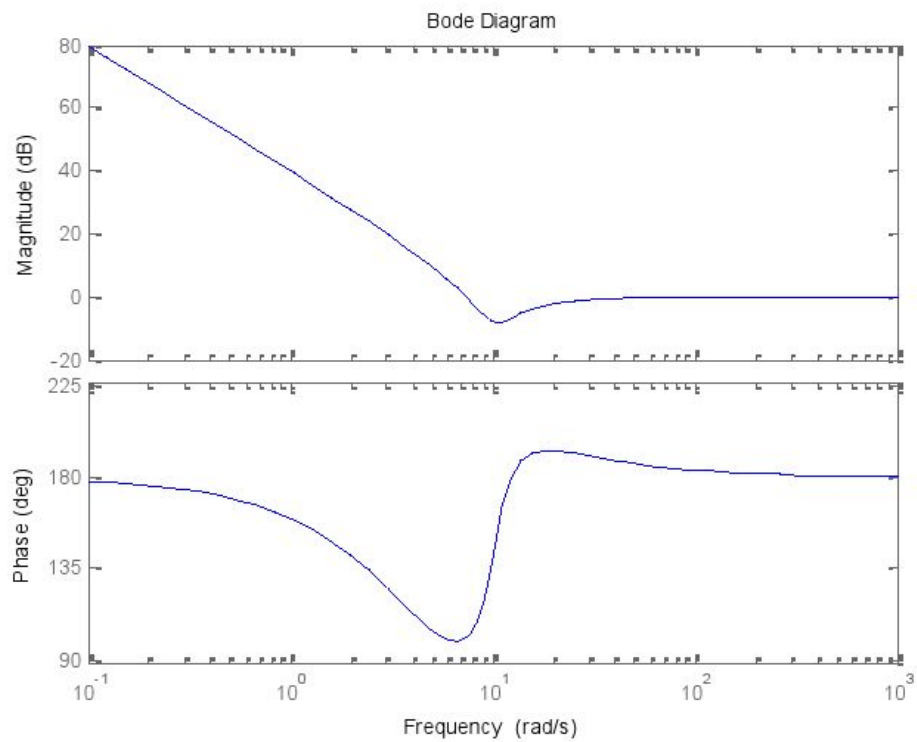
(۱) محل قطبهای حلقه باز به صورت $s = -\infty \pm j\ell\pi$ است که $\ell \in \mathbb{Z}$

(۲) محل صفرهای حلقه باز به صورت $s = +\infty \pm j(2\ell+1)\frac{\pi}{2}$ است که $\ell \in \mathbb{Z}$

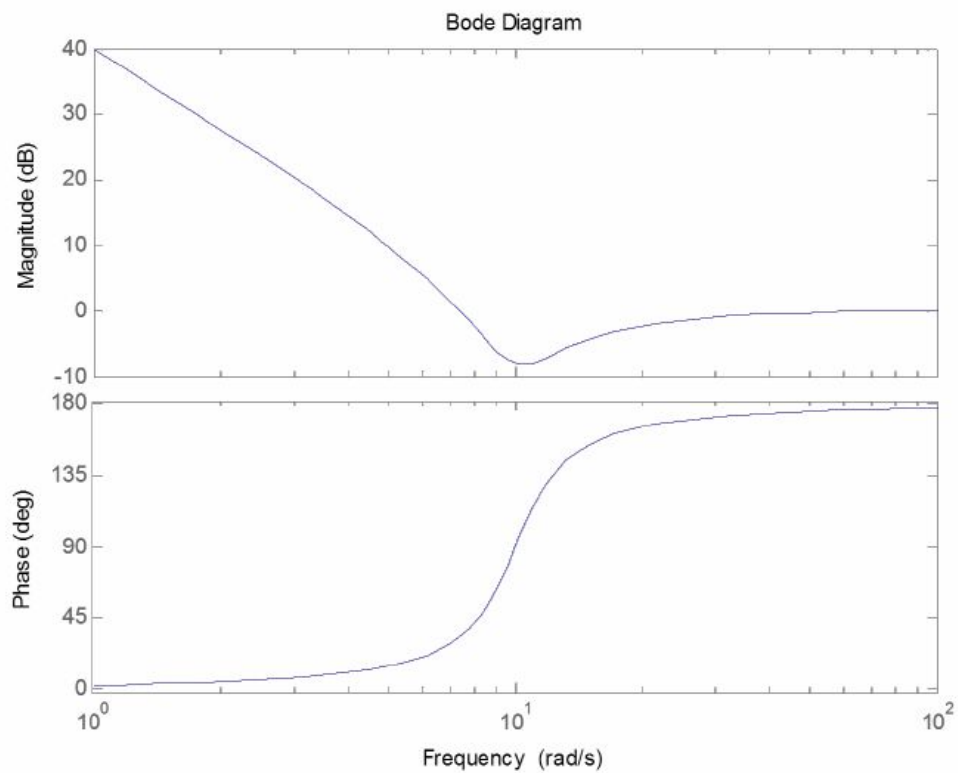
(۳) محل برخورد مکان با محور $j\omega$ از حل معادله $\tan 2\omega = \frac{2\omega}{\omega^2 - 2}$ بدست می آید.

(۴) هر سه گزینه صحیح است

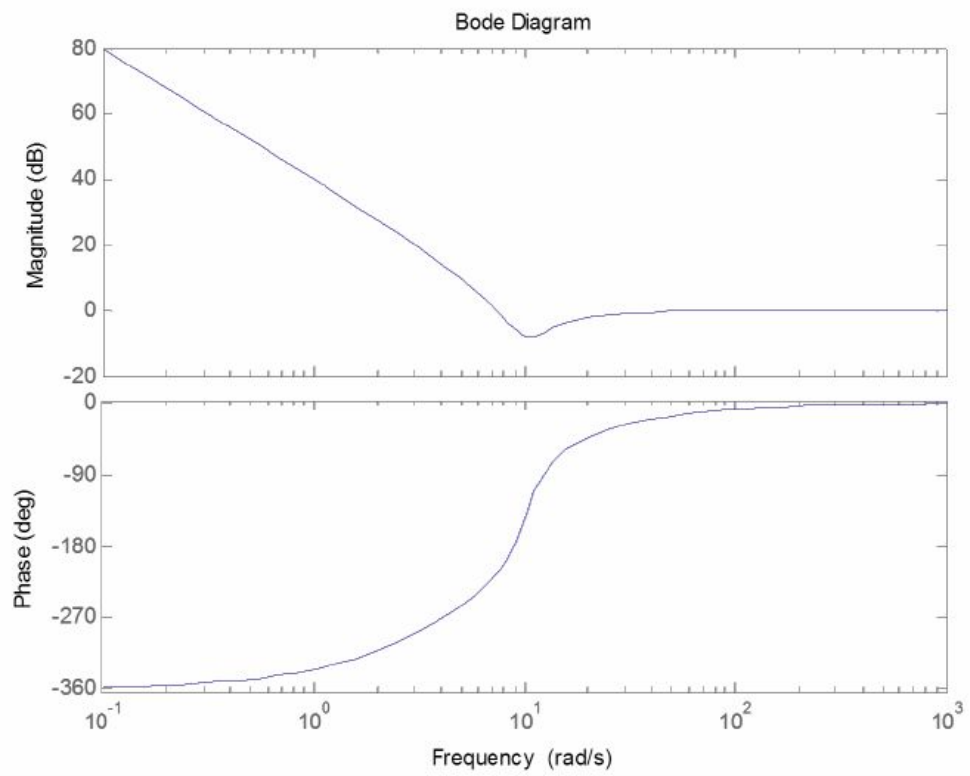
۱۲- دیاگرام بودی تابع تبدیل $G(s) = \frac{s^2 - s^2 + 10s - 50}{s^2 + 5s^2}$ کدام گزینه است؟



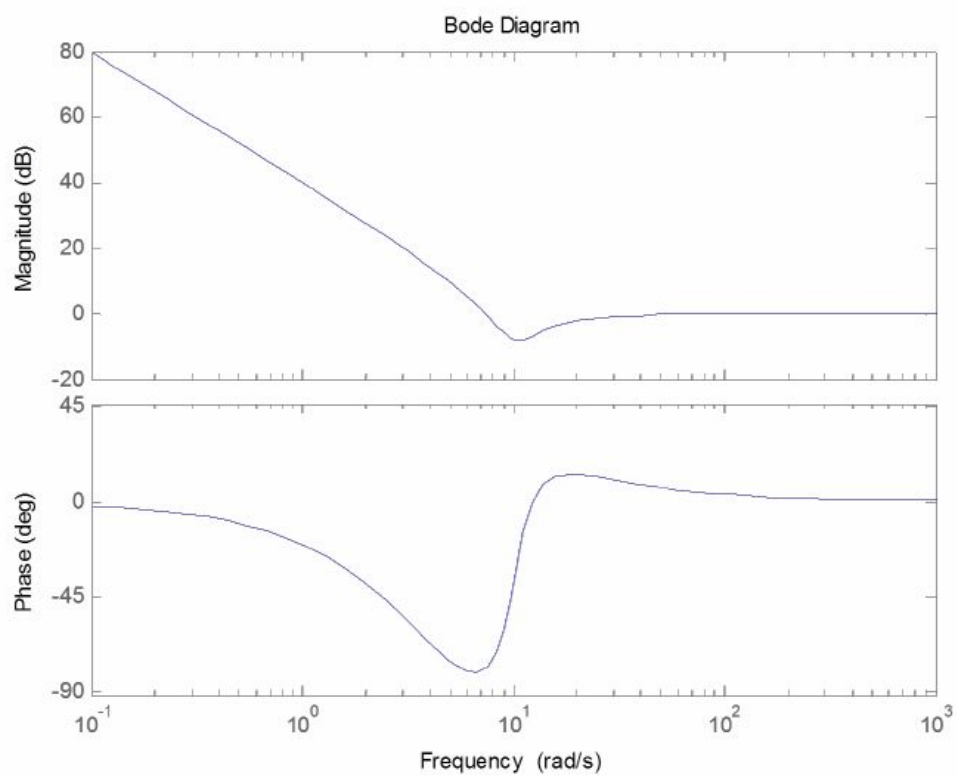
(۱)



(۲)



(۳)



(۴)

سیستم‌های کنترل خطی

۱- گزینه «۱» صحیح است.

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

$$y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} x$$

$$u = -[k_1 \quad k_2] x$$

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -k_1 & -k_2 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2-k_1 & 2-k_2 \end{pmatrix} x$$

$$\Delta(s) = s(s-2+k_2) + k_1 - 2 = s^2 + (k_2-2)s + k_1 - 2$$

$$s = -\xi \omega_n \pm j \omega_n \sqrt{1-\xi^2} = \frac{-\sqrt{2}}{2} \pm j \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Delta(s) = s^2 + \sqrt{2}s + 1 \Rightarrow \begin{cases} k_1 = 2 \\ k_2 = 2 + \sqrt{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \xi = \frac{1}{2} \\ \omega_n = 2 \end{cases} \quad \omega_d = 2\sqrt{1-\frac{1}{4}} = \sqrt{3}$$

$$t_s = \frac{4}{\xi \omega_n} = 4$$

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$$

$$M_r = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$x = -\frac{1}{2\xi} = 1$$

$$\omega_0 = 2$$

۲- گزینه «۳» صحیح است.

$$S(s) = \frac{1}{1+G(s)}$$

$$S(j\omega) = \frac{1}{1+G(j\omega)} = \frac{1}{1+|G(j\omega)| e^{j\angle G(j\omega)}}$$

$$S(j\omega_g) = \frac{1}{1+e^{j(-\pi+\gamma)}} = \frac{1}{1+\cos(-\pi+\gamma) + j\sin(-\pi+\gamma)}$$

$$S(j\omega_g) = \frac{1}{1-\cos\gamma + j\sin\gamma}$$

$$|S(j\omega_g)| = \frac{1}{\sqrt{1+\cos^2\gamma - 2\cos\gamma + \sin^2\gamma}} = \frac{1}{\sqrt{2(1-\cos\gamma)}}$$

۳- گزینه «۲» صحیح است.

باید در مخرج کنترلر S باشد.

۴- گزینه «۲» صحیح است.

$$G_M = 2 \cdot \log a = 6 \Rightarrow a = 2$$

$$s \left(1 + \frac{s}{2} \right)^2 + 2k = 0 \Rightarrow \frac{s^2}{4} + s^2 + s + 2k = 0$$

$$\begin{array}{l} s^2 \left| \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 4 & 2k \end{array} \right. \\ s^2 \left| \begin{array}{cc} 1 & 2k \\ 4 & 1 \end{array} \right. \\ s^1 \left| \begin{array}{cc} 1 & -\frac{k}{2} \\ 4 & 2k \end{array} \right. \\ s^0 \left| \begin{array}{cc} 1 & 2k \end{array} \right. \end{array} \Rightarrow k = 2$$

$$e_{ss} |_{vt} = \frac{2}{k_v} = \frac{2}{k} = 1$$

۵- گزینه «۴» صحیح است.

$$T(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = C(SI - A)^{-1} B$$

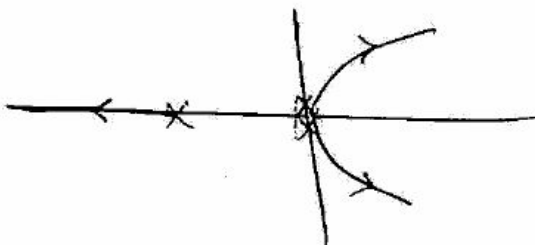
$$y_{ss} = C(-A)^{-1} B = (2 \ 1) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} (2 \ 1) \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1$$

۶- گزینه «۲» صحیح است.

$$\dot{x} = M^{-1} z$$

$$M^{-1} z = AM^{-1} z + Bu \Rightarrow z = MAM^{-1} z + MBu$$

$$y = CM^{-1} z \quad y = CM^{-1} z$$



۷- گزینه «۴» صحیح است.

سیستم حلقه بسته ناپایدار است بنابراین $e_{ss} = \infty$
حد فاز منفی است.

۸- گزینه «۱» صحیح است.

راث بزنید.

۹- گزینه «۲» صحیح است.

$$\varphi^{-1}(t) = \varphi(-t) \quad A = \varphi(0)$$

۱۰- گزینه «۲» صحیح است.

$$\frac{y(s)}{u(s)} = \frac{ra}{s+1} + \frac{rb}{s+2}$$

$$u(s) = \frac{1}{s} \Rightarrow y(s) = \frac{ra}{s(s+1)} + \frac{rb}{s(s+2)} = \frac{ra}{s} + \frac{-ra}{s+1} + \frac{b}{s} + \frac{-b}{s+2}$$

$$y(t) = (ra+b)u(t) - (ra e^{-t} + b e^{-2t})u(t)$$

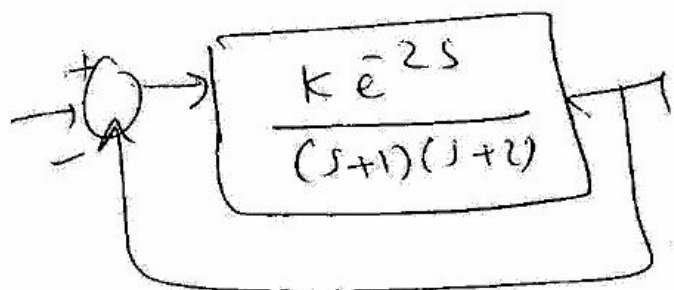
$$ra+b=1$$

$$y'(t)=0 \Rightarrow -rae^{-t} - rb e^{-2t} = 0 \Rightarrow -rae^{-t} = rb e^{-2t}$$

$$e^t = -\frac{b}{ra} \Rightarrow \frac{-b}{ra} = \frac{r}{r}$$

$$a=1$$

$$b=-r$$



۱۱- گزینه «۳» صحیح است.

$$\Delta(s) = s^2 + 3s + 2 + k e^{-2j\omega} = 0$$

$$\Delta(j\omega) = 2 - \omega^2 + k \cos 2\omega + j(3\omega - k \sin 2\omega) = 0$$

$$2 - \omega^2 = -k \cos 2\omega \Rightarrow 3\omega = k \sin 2\omega$$

$$\frac{2 - \omega^2}{3\omega} = -\cot 2\omega \Rightarrow \tan 2\omega = \frac{3\omega}{\omega^2 - 2}$$

۱۲- گزینه «۴» صحیح است.