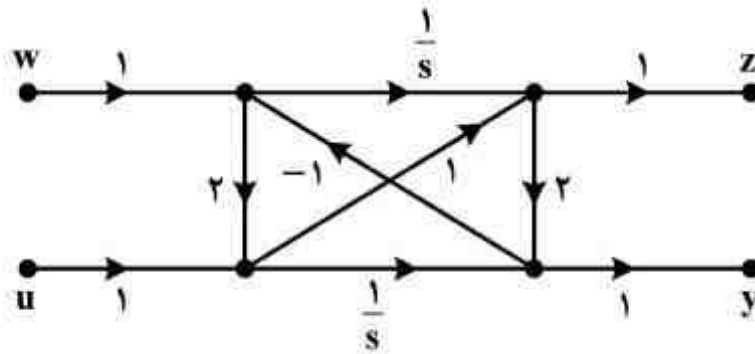


سیستم‌های کنترل خطی:

۱- شکل زیر یک سیستم دو دهانه را نشان می‌دهد. اگر قانون کنترلی به شکل $u = -ky$ تعریف گردد، تابع



تبدیل $\frac{Z}{W}$ کدام است؟

$$(1) \frac{s+k}{s^2+(k+4)s}$$

$$(2) \frac{2s^2+s+k}{\Delta s^2+ks}$$

$$(3) \frac{2s^2+s+k}{\Delta s^2+(4+k)s}$$

$$(4) \frac{2s^2+s+k}{(\Delta+2k)s^2+(4+k)s}$$

۲- بخشی از جدول راث متناظر با یک سیستم مرتبه ۷ به شکل زیر داده شده است. در مورد پایداری سیستم گزینه صحیح کدام است؟ (تمام پارامترهای جدول غیر از K مثبت هستند.)

S^7	A	B	C	D
S^6	E	F	G	H
S^5	I	J	K	0

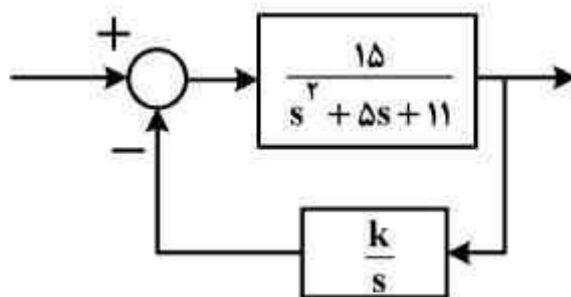
(۱) پایدار

(۲) ناپایدار

(۳) پایدار مرزی

(۴) بدون دانستن مقادیر عددی پارامترها نمی‌توان اظهار نظر کرد.

۳- سیستم کنترلی زیر را در نظر بگیرید. برای اینکه فقط دو قطب سیستم حلقه بسته در محدوده $-2 < \text{Re}(s) < 0$ قرار گیرند، کدام بازه k صحیح است؟



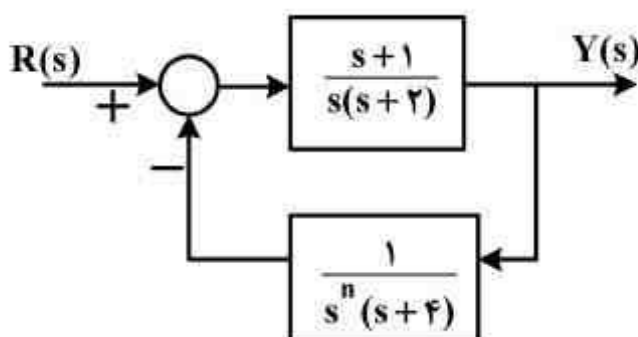
$$(1) \frac{1}{5} < k < \frac{11}{3}$$

$$(2) \frac{2}{3} < k < \frac{11}{3}$$

$$(3) \frac{7}{15} < k < \frac{11}{3}$$

(۴) امکان پذیر نیست.

۴- در سیستم شکل زیر، برای $n \geq 0$ و ورودی پله واحد، با توجه به تعریف خطای دائم سیستم به صورت $e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} (r(t) - y(t))$ ، گزینه صحیح کدام است؟



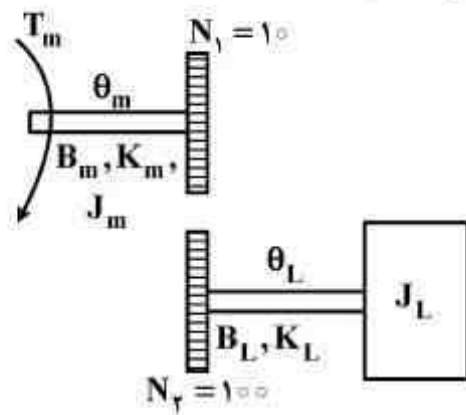
(۱) برای $n > 2$ سیستم ناپایدار است.

(۲) برای $n \geq 0$ خطای حالت دائم سیستم صفر است.

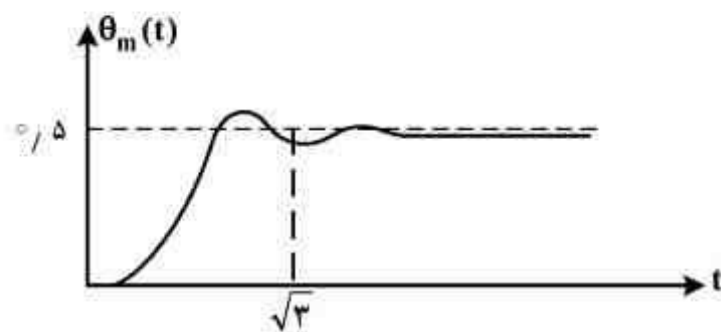
(۳) برای $n = 0$ خطای حالت دائم پاسخ پله سیستم $e_{ss} = -3$ است.

(۴) هر دو گزینه ۱ و ۳ صحیح است.

- ۵ - سیستم شکل الف شفت یک موتور DC را که توسط جعبه دنده به بار مکانیکی J_L متصل شده است، نشان می‌دهد. شکل ب، پاسخ زاویه شفت موتور $(\theta_m(s))$ را به ورودی پله واحد $(T_m(s) = \frac{1}{s})$ نشان می‌دهد، در صورتی که $K_L = 100$ بوده و بدانیم زاویه قطب‌های سیستم با محور حقیقی برابر 60° درجه است، مقادیر ω_n (فرکانس طبیعی سیستم) و k_m به ترتیب از راست به چپ کدام است؟



شکل الف



شکل ب

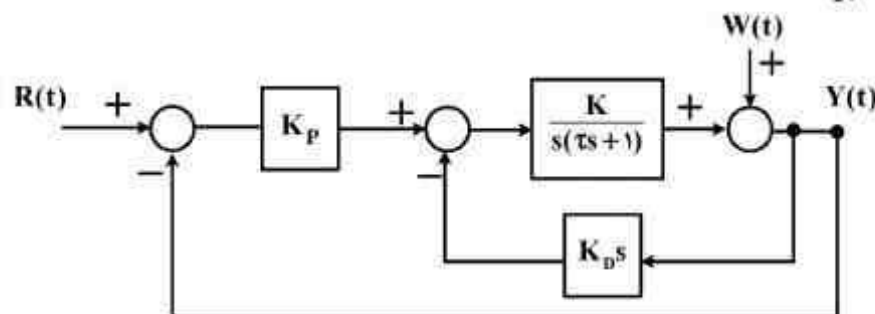
$$2, \frac{2\pi}{3} \quad (2)$$

$$1, \frac{2\pi}{3} \quad (1)$$

$$2, \frac{4\pi}{3} \quad (4)$$

$$1, \frac{4\pi}{3} \quad (3)$$

- ۶ - سیستم زیر را در نظر بگیرید. اگر سیگنال‌های $W(t)$ و $R(t)$ پله واحد باشند، خطای حالت دائم ناشی از $W(t)$ و $R(t)$ به ترتیب چگونه خواهد بود؟

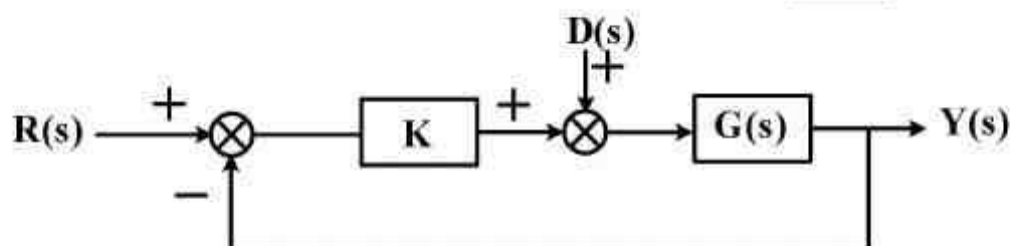


- (۱) صفر - صفر
(۲) صفر - نامحدود
(۳) غیر صفر محدود - صفر
(۴) غیر صفر محدود - نامحدود

- ۷ - گزینه صحیح کدام است؟

- (۱) همه قطب‌هایی که روی خط $\sigma = -2$ قرار می‌گیرند زمان نشست معادل ۲ ثانیه (با معیار دو درصد) دارند.
(۲) فرکانسی که منحنی نایکوئیست در آن محور حقیقی را قطع می‌کند، جزو مکان ریشه‌های سیستم است $(0 < k < \infty)$
(۳) اغتشاشی که مستقیماً به خروجی سیستم وارد می‌شود راحت‌تر از اغتشاشی که به ورودی سیستم وارد می‌شود، حذف می‌شود.
(۴) اگر سیستم ناکمینه فاز باشد، حتماً پدیده پایین زدگی (undershoot) در پاسخ پله رخ می‌دهد.

- ۸- در سیستم زیر $G(s)$ یک سیستم مرتبه دوم پایدار با قطب‌های مختلط می‌باشد. کدام یک از گزینه‌های زیر در مورد این سیستم نادرست است؟



- (۱) اگر $G(s)$ کمینه فاز و دارای بهره DC مثبت باشد، برای همه مقادیر $k > 0$ پاسخ پله واحد به ورودی مرجع $R(s)$ محدود است.
 (۲) اگر $G(s)$ ناکمینه فاز و دارای بهره DC منفی باشد، پاسخ پله واحد به ورودی $D(s)$ به ازای هیچ $k > 0$ میرای شدید نخواهد بود.
 (۳) اگر $G(s)$ ناکمینه فاز و دارای بهره DC مثبت باشد، همواره به ازای بعضی مقادیر $k > 0$ ، پاسخ پله واحد به ورودی مرجع $R(s)$ نامحدود خواهد شد.
 (۴) اگر $G(s)$ کمینه فاز و دارای بهره DC مثبت باشد، با افزایش k به سمت بی‌نهایت مقدار ماندگار پاسخ پله واحد به ورودی $D(s)$ به سمت صفر میل می‌کند.

- ۹- کدام یک از سیستم‌های با معادله مشخصه زیر، می‌تواند به ازای بهره‌های مثبت بزرگ k پایدار باشد؟

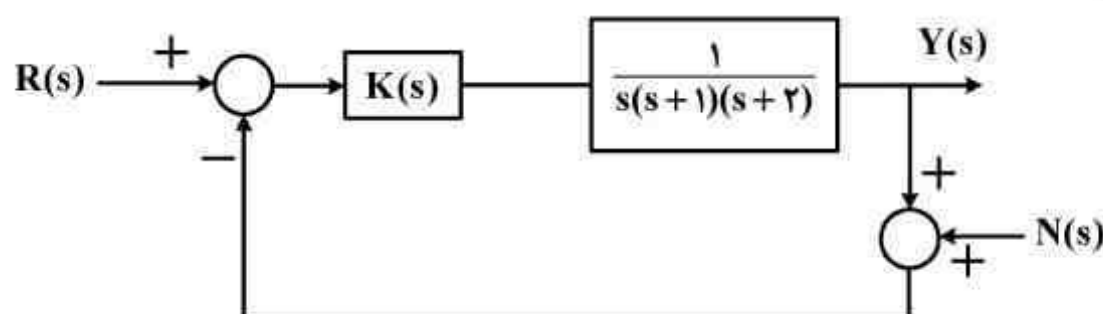
$$s^5 + 18s^4 + 108s^3 + (278 + 13k)s^2 + 467s + 280 + 60k = 0 \quad (1)$$

$$s^5 + 18s^4 + 108s^3 + (278 + 13k)s^2 + (467 + 25k)s + 280 + 60k = 0 \quad (2)$$

$$s^5 + 18s^4 + (108 + k)s^3 + (278 + 13k)s^2 + (467 + 25k)s + 280 + 60k = 0 \quad (3)$$

- (۴) هر سه گزینه دارای پنج قطب است. پس حتماً به ازای بهره‌های بزرگ ناپایدار خواهد بود.

- ۱۰- سیستم حلقه بسته شکل زیر را در نظر بگیرید. کدام یک از کنترل کننده‌های زیر قابلیت بیشتری برای حذف نویز اندازه‌گیری $N(s)$ دارد؟



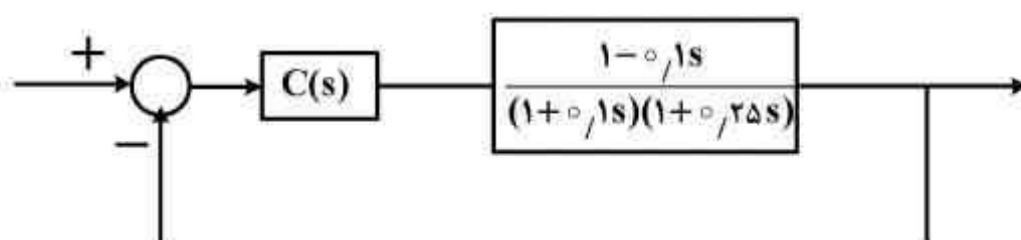
(۱) تناسبی - انتگرالی

(۲) تناسبی

(۳) انتگرالی

(۴) تناسبی - مشتق‌گیر

- ۱۱- در سیستم حلقه بسته شکل زیر، ساده‌ترین کنترل کننده $C(s)$ کدام است؟ به طوری که خطای دائم برای ورودی شیب محدود باشد و سیستم حلقه بسته سریع‌ترین پاسخ پله بدون بالازدگی را داشته باشد.



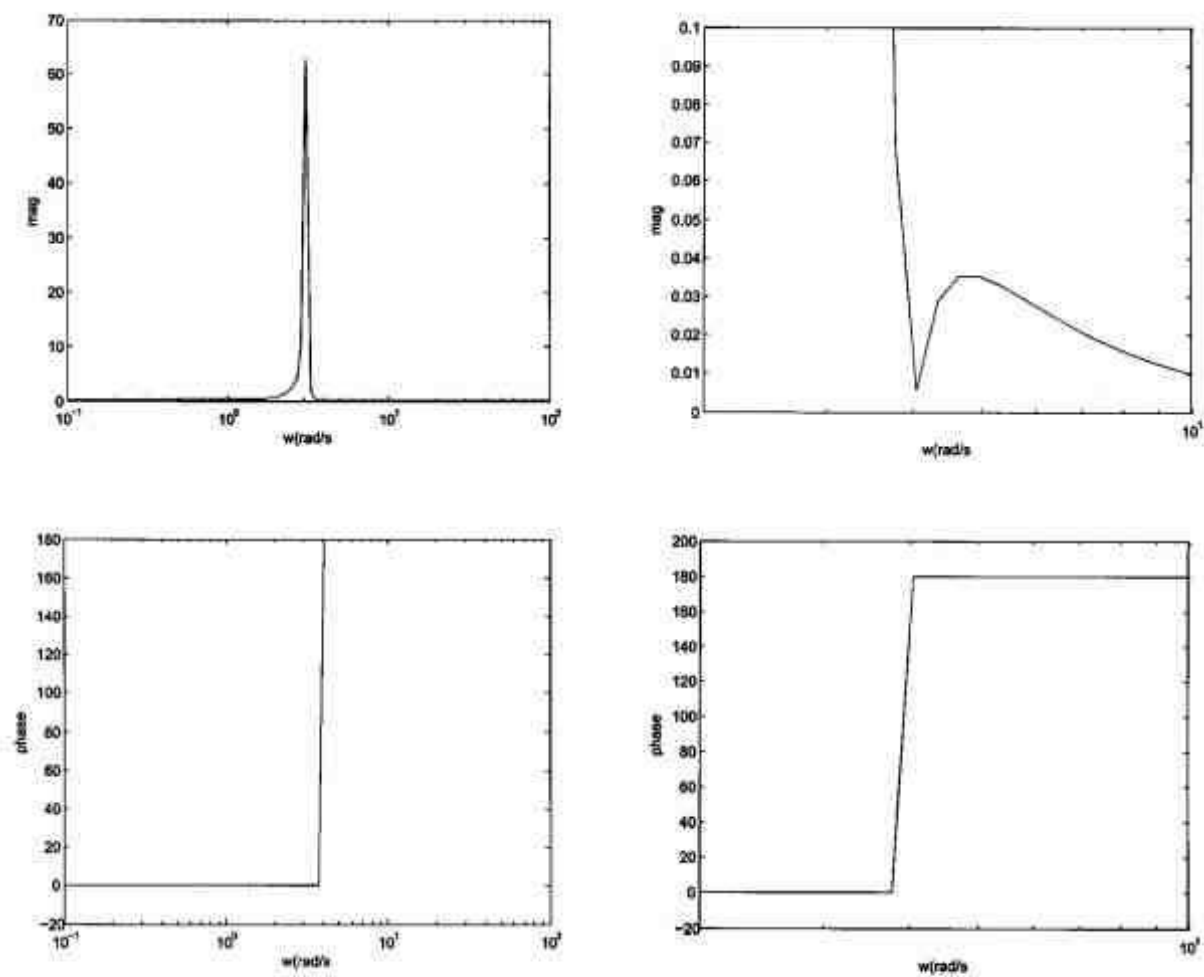
PD (۱)

PI (۲)

PID (۳)

Lead (۴)

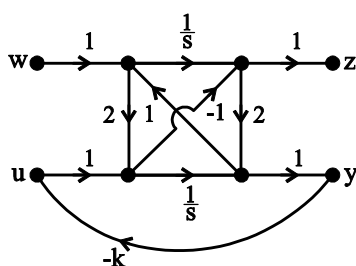
۱۲- پاسخ فرکانسی تابع تبدیل $G(s)$ که در یک سیستم فیدبک واحد به کار برده می‌شود در شکل زیر نشان داده شده است، (دقت کنید که اندازه پاسخ فرکانسی و نه لگاریتم آن ترسیم شده و همچنین پاسخ فرکانسی در بازه ۲ تا ۱۰ رادیان بر ثانیه در اشکال سمت راست بزرگنمایی شده است). گزینه صحیح کدام است؟



- (۱) تابع تبدیل $G(s)$ دارای دو صفر سمت راست است.
- (۲) تابع تبدیل حلقه بسته همواره پایدار است.
- (۳) تابع تبدیل حلقه بسته همواره ناپایدار با ۴ قطب سمت راست است.
- (۴) به ازای هیچ بهره k سیستم حلقه بسته، اکیداً پایدار نمی‌شود.

پاسخ تشریح

۱. گزینه 4 درست است.



$$l_1 = \left(\frac{1}{s}\right)(2)(-1) = -\frac{2}{s}$$

$$l_2 = (2)\left(\frac{1}{s}\right)(-1) = -\frac{2}{s}$$

$$l_3 = (2)(1)(2)(-1) = -4$$

$$l_4 = (2)(1)(-k)(1)(1) = -2k$$

$$l_5 = (1)\left(\frac{1}{s}\right)(1)(-k) = -\frac{k}{s}$$

مسیرهای پیشرو عبارتند از:

$$P_1 = (1)\left(\frac{1}{s}\right)(1) = \frac{1}{s}$$

$$P_2 = (1)(2)(1)(1) = 2$$

$$\Delta = 1 - (l_1 + l_2 + l_3 + l_4 + l_5) = 1 + \frac{2}{s} + \frac{2}{s} + 4 + 2k + \frac{k}{s}$$

$$\Delta_1 = 1 - l_5 = 1 + \frac{k}{s}, \quad \Delta_2 = 1$$

$$T(s) = \frac{z}{w} = \frac{P_1 \Delta_1 + P_2 \Delta_2}{\Delta} = \frac{\frac{1}{s}\left(1 + \frac{k}{s}\right) + 2(1)}{1 + \frac{4}{s} + 4 + 2k + \frac{k}{s}} = \frac{\frac{(s+k) + 2s^2}{s^2}}{\frac{(5+2k)s + (4+k)}{s}} = \frac{2s^2 + (5+k)}{(5+2k)s^2 + (4+k)s}$$

۲. گزینه 2 درست است.

$$\begin{array}{l|llll}
 s^7 & A & B & C & D \\
 s^6 & E & F & G & H \\
 s^5 & I & J & K & 0 \\
 s^4 & a & b & H & \\
 s^3 & c & d & 0 & \\
 s^2 & e & H & & \\
 s^1 & f & 0 & & \\
 s^0 & H & & &
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 a = \frac{IF-EJ}{I}, \quad b = \frac{IG-KE}{I} \\
 c = \frac{aJ-bI}{a}, \quad d = \frac{aK-IH}{a} \\
 e = \frac{cb-ad}{c}, \quad f = \frac{ed-cH}{e}
 \end{array}$$

از روی روابط نمی‌توان نظر داد.

در چنین سوالاتی بهتر است مثال نقض بیاوریم تا ناپایداری (!) سیستم ثابت شود. چرا که بحث پایداری و پایداری مرزی خیلی کلی خواهد بود. برای مثال:

$$\begin{array}{l|llll}
 s^7 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 s^6 & 2 & 1 & 1 & 3 \\
 s^5 & 1 & 1 & -1 & 0 \\
 s^4 & -1 & & & \\
 0 & & & & \\
 0 & & & & \\
 0 & & & &
 \end{array}
 \quad \rightarrow \quad \text{سیستم ناپایدار است}$$

۳. گزینه 2 درست است.

برای اینکه داشته باشیم $\text{Re}(s) < 0$

$$q(s) = s^3 + 5s^2 + 11s + 15k$$

$$\begin{array}{l|llll}
 s^3 & 1 & & 11 & \\
 s^2 & 5 & 15k & 3k & \\
 s^1 & 11-3k & 0 & k > 0 & \\
 s^0 & 3k & & &
 \end{array}
 \quad \rightarrow \quad 0 < k < \frac{11}{3}$$

برای برقراری شرط $\text{Re}(s) > -2$ باید با جایگذاری $(s-2)$ به جای s در معادله مشخصه سیستم، دو قطب سیستم راست وجود داشته باشد (که همان معادل دو قطب سمت راست -2 برای معادله اصلی است):

$$(s-2)^3 + 5(s-2)^2 + 11(s-2) + 15k = 0$$

$$s^3 - 6s^2 + 12s - 8 + 5(s^2 - 4s + 4) + 11s - 22 + 15k = 0 \rightarrow s^3 - s^2 + 3s + 15k - 10 = 0$$

$$\begin{array}{l|llll}
 s^3 & 1 & & 3 & \\
 s^2 & -1 & 15k-10 & -7+15k > 0 \rightarrow k > \frac{7}{15} & \\
 s^1 & -7+15k & 0 & 15k-10 > 0 \rightarrow k > \frac{10}{15} & \\
 s^0 & 15k-10 & & &
 \end{array}
 \quad \rightarrow \quad k > \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$$

پس در کل و با اشتراک دو بازه به دست آمده برای k خواهیم داشت:

$$\frac{2}{3} < k < \frac{11}{3}$$

۴. گزینه 4 درست است.

چون رابطه خطا داده شده، از روی آن خطا را محاسبه می‌کنیم:

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) \quad , \quad E(s) = R(s) - Y(s) = R(s)(1 - T(s))$$

$$R(s) = \frac{1}{s} \rightarrow sE(s) = s \frac{1}{s} (1 - T(s)) = 1 - T(s)$$

$$1 - T(s) = 1 - \frac{s^n (s+1)(s+4)}{ss^n (s+2)(s+4) + s + 1}$$

$$n = 0 \rightarrow \lim_{s \rightarrow 0} (1 - T(s)) = 1 - \lim_{s \rightarrow 0} \frac{(s+1)(s+4)}{s^2 (s+2)(s+4) + s + 1} = 1 - \frac{4}{1} = -3 \quad \text{گزینه 3}$$

$$n = 3 \rightarrow \lim_{s \rightarrow 0} (1 - T(s)) = 1 - \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^3 (4)}{s^4 (8) + 1} = \infty \rightarrow \quad \text{گزینه 1}$$

با توجه به گزینه‌ها گزینه 4 درست است.

۵. گزینه 3 درست است

رابطه بین T_m و θ_L و θ_m

$$T_m s = J_m s^2 + b_m s + k_m \theta_m s + J_L s^2 + B_L s + k_L n \theta_L s$$

$$n = \frac{N_1}{N_2} = \frac{1}{10} \quad , \quad \theta_L = n \theta_m$$

چون θ_m در خروجی داده شده است، رابطه را بر حسب θ_m می‌نویسیم:

$$T_m(s) = (J_m s^2 + b_m s + k_m \theta_m(s) + (J_L s^2 + B_L s + k_L) n^2 \theta_m(s))$$

$$T_m(s) = \left[(J_m + J_L n^2) s^2 + (b_m + n^2 B_L) s + (k_m + n^2 k_L) \right] \theta_m(s)$$

$$= \left[\left(J_m + \frac{J_L}{100} \right) s^2 + \left(b_m + \frac{B_L}{100} \right) s + \left(k_m + \frac{k_L}{100} \right) \right] \theta_m(s)$$

از روی شکل پاسخ داریم:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \theta_m(t) = 0.5 = \lim_{s \rightarrow 0} s \theta_m(s)$$

$$\theta_m(s) = T_m(s) \frac{1}{Js^2 + bs + k} = \frac{1}{5s} \frac{1}{Js^2 + bs + k}$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} s \theta_m(s) = \frac{1}{5k} = 0.5 \rightarrow k_m + \frac{k_L}{100} = \frac{1}{2.5} \xrightarrow{k_L=100} k_m = \frac{1}{2.5} - 1 = -\frac{1.5}{2.5} \quad \text{در گزینه‌ها وجود ندارد!}$$

به نظر می‌رسد که $T_m = \frac{1}{s}$ در صورت سوال به اشتباه $\frac{1}{5}$ نوشته شده است! اگر با این فرض پیش برویم:

$$\lim_{s \rightarrow 0} s \theta_m(s) = \frac{1}{k} = 0.5 \rightarrow k_m + \frac{k_L}{100} = 2 \xrightarrow{k_L=100} k_m = 1$$

محاسبه ω_m :

$$\frac{2\pi}{\omega_d} = \sqrt{3} \rightarrow \omega_n \sqrt{1-\xi^2} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

با توجه به زاویه قطبها $\zeta = \cos 60 = \frac{1}{2}$ داریم:

$$\omega_n \sqrt{1-\frac{1}{4}} = \omega_n \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \rightarrow \omega_n = \frac{4\pi}{3}$$

جواب صحیح با فرض $T_m = \frac{1}{s}$ گزینه 3 درست است.

۶. گزینه 1 درست است.

فیدبک بیرونی فیدبک واحد است. تابع تبدیل $G(s)$ برابر است با:

$$G(s) = K_p \left(\frac{K}{s(\tau s + 1) + KK_D s} \right) = \frac{KK_p}{s(\tau s + 1 + KK_D)} \rightarrow \text{سیستم نوع 1}$$

گزینه 1 یا 2 صحیح است $\rightarrow e_{SSR} = 0$ طبق جدول خطا $R(t)$ پله واحد

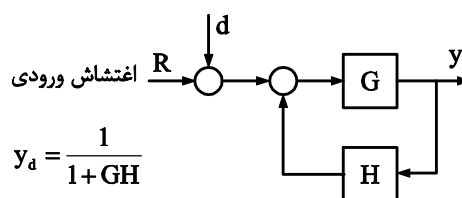
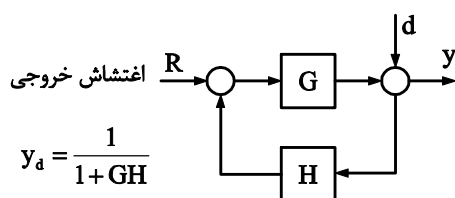
چون خطا را تعریف نکرده، لذا همان محل سیگنال معمول $(R - Y)$ در نظر می گیریم:

$$E(s) = R(s) - Y(s) = -Y(s) = -W(s) \frac{1}{1+G(s)}$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \left(-\frac{1}{s} \right) \frac{1}{1+G(s)} = -\frac{1}{1+\lim_{s \rightarrow 0} G(s)} = \frac{1}{\infty} = 0$$

۷. گزینه 3 درست است.

صحت آن از بررسی اغتشاش ورودی و خروجی به دست می آید:

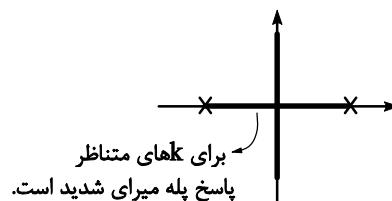


برای گزینه های دیگر می توان مثال نقض آورد.

۸. گزینه 2 درست است.

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s-1)} \text{ سیستم ناکمینه فاز}$$

$$DG(0) = -1 < 0$$



برای سایر گزینه ها می توان صحت را بررسی نمود.

۹. گزینه 3 درست است.

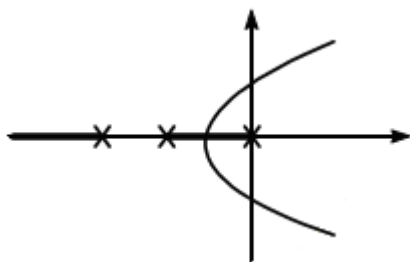
از جدول راث کمک می گیریم.

برای گزینه اول داریم:

s^5	1	108	467
s^4	18	$278+13k$	$280+60k$
s^3	$\frac{1666-13k}{18}$	→ با افزایش k منفی می شود لذا ناپایدار خواهد شد	
s^2			
s^1			
s^0			

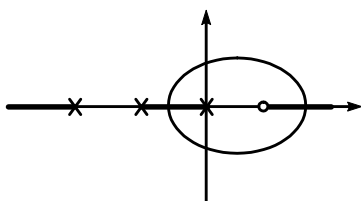
برای گزینه دوم نیز به همین منوال است (قابل بررسی) گزینه چهارم حتمی نیست و حکم کلی نمی تواند صادر نمود!

۱۰. گزینه 1 درست است.



هدف، حذف نویز اندازه گیری است. میدانیم کنترل کننده ی تناسبی-مشتقی مثل یک فیلتر بالاگذر عمل کرده و باعث تشدید نویز می شود. کنترل تناسبی هم به تنهایی قادر به حذف نویز نیست. لذا گزینه های 2 و 4 غلط هستند. با توجه به مکان هندسی ریشه های سیستم که به صورت زیر است، اضافه کردن انتگرالگیر قطعا سیستم را ناپایدار می کند. لذا کنترل کننده تناسبی-انتگرالی به فرم $k(1 + \frac{k_I}{s})$ می تواند ضمن حفظ پایداری سیستم، نویز را حذف کند.

۱۱. گزینه 2 درست است.



مشخصات مطلوب سیستم، خطای محدود برای ورودی شیب و سریع ترین پاسخ بدون اورشوت است. خطای محدود به ورودی شیب یعنی سیستم نوع یک و این امر با انتگرال گیر محقق می شود. لذ گزینه 1 نادرست است. سریع ترین پاسخ بدون اورشوت یعنی نقطه شکست مکان هندسی ریشه ها مکان ریشه های سیستم با وجود یک انتگرال گیر به صورت مقابل است:

با تنظیم بهره می توان به خواسته های سیستم رسید.

۱۲. گزینه 4 درست است.

با توجه به پیک سوزنی شکل در دیاگرام اندازه، سیستم دارای صفر و قطب موهومی است. با توجه به دیاگرام داده شده می توان نوشت:

$$G(s) = -\frac{s^2 - a}{s^2 + b}$$

$$1 + KG(s) = 0 \rightarrow s^2 + b^2 - ks^2 + ka = 0 \rightarrow (1-k)s^2 + (b^2 + ka) = 0$$

سیستم پایدار نیست (تمام ضرایب موجود نیستند و سیستم شرط لازم برای پایداری را ندارد).