

الکترومغناطیس

- ۱ - صفحات یک خازن مسطح با صفحات بزرگ در $Z = 0$ و $Z = d$ قرار گرفته اند. در صورتیکه ضریب نفوذپذیری فضای بین دو صفحه به $\epsilon = \epsilon_0 (1 + (\frac{Z}{d})^2)$ باشد، اگر ولتاژ در $Z = 0$ صفر ولت و در $Z = d$ برابر با V_0 باشد در این صورت شدت میدان الکتریکی در این ناحیه کدام است؟

$$(1) \hat{z} \frac{4V_0 d}{\pi(Z^2 + d^2)} \quad (2) \hat{z} \frac{2V_0 d}{\pi(Z^2 + d^2)} \quad (3) \hat{z} \frac{V_0 d}{\pi(Z^2 + d^2)} \quad (4) \hat{z} \frac{V_0 d}{4\pi(Z^2 + d^2)}$$

- ۲ - یک پوسته کروی به شعاع داخلی a و شعاع خارجی $4a$ به مرکز مبدا مختصات مفروض است. اگر کره داخلی به پتانسیل V_0 و کره خارجی به پتانسیل صفر وصل شود و فضای بین دو کره از ماده ای با رسانایی $\sigma = \frac{\sigma_0}{R}$ اشغال شده باشد. جگالی جریان الکتریکی در ناحیه بین دو پوسته کدام است؟

$$(1) \bar{J} = \frac{\sigma_0 V_0}{\ln(4) R^2} \vec{a}_R \quad (2) \bar{J} = \frac{\sigma_0 V_0}{\ln(2) R^2} \vec{a}_R$$

$$(3) \bar{J} = \frac{\sigma_0 V_0}{4 R^2} \vec{a}_R \quad (4) \bar{J} = \frac{\sigma_0 V_0}{2 R^2} \vec{a}_R$$

- ۳ - دو پوسته کروی رسانای هم مرکز به شعاع های a و $4a$ به زمین متصل شده اند و بار نقطه ای c بین آن دو و در فاصله $R = 2a$ واقع شده است. بار القایی بر روی کره بزرگتر کدام است؟

$$(1) \frac{-1}{3} c \quad (2) \frac{-2}{3} c \quad (3) \frac{-3}{5} c \quad (4) \frac{-4}{5} c$$

- ۴ - کره ای رسانا به شعاع a و پتانسیل V_0 در فضای خلا قرار دارد. اگر کره از منبع جدا کنیم و در فضایی با ضریب گذردهی

$$\epsilon = \epsilon_0 (1 + \frac{a}{R}) \sin \theta (1 + \cos \theta)$$

$$(1) 2 \ln(2) \quad (2) \ln(2) \quad (3) 2\pi \ln(2) \quad (4) \frac{2}{\pi} \ln(2)$$

- ۵ - انرژی ذخیره شده در واحد طول پوسته استوانه ای طویل با شعاع داخلی a و خارجی $2a$ که دارای جگالی بار حجمی $\rho = r$ در فضای خالی کدام است؟

$$(1) \frac{\pi a^5}{54 \epsilon_0} \quad (2) \frac{\pi a^6}{54 \epsilon_0} \quad (3) \frac{\pi a^6}{9 \epsilon_0} \quad (4) \frac{\pi a^5}{9 \epsilon_0}$$

- ۶ - ناحیه $1 \leq r \leq 2$ و $0 \leq \phi < 2\pi$ از ماده ای با ضریب هدایت $\sigma = \sigma_0 (1 + \frac{1}{r})(Z^2 + 1)(1 + \cos^2 \phi)$ پر شده است. مقاومت الکتریکی بین صفحات $Z = 0$ و $Z = 1$ کدام است؟

$$(1) R = \frac{1}{20 \sigma_0} \quad (2) R = \frac{1}{30 \sigma_0} \quad (3) R = \frac{1}{10 \sigma_0} \quad (4) R = \frac{3}{40 \sigma_0}$$

۷ - یک دو قطبی الکتریکی میکروسکوپی با بردار گشتاور $\vec{p} = p_0 \hat{z}$ در مبداء مختصات قرار گرفته است. اگر بار q را از نقطه $(r = 4, \theta = \frac{\pi}{6}, \phi = 0)$ به نقطه $(r = 2, \theta = \frac{\pi}{3}, \phi = \frac{\pi}{2})$ منتقل کنیم چقدر کار انجام داده ایم؟

$$\frac{p_0 q}{128 \pi \epsilon_0} (4 - \sqrt{3}) \quad (1)$$

$$\frac{p_0 q}{64 \pi \epsilon_0} (2\sqrt{2} + \sqrt{3}) \quad (2)$$

$$\frac{p_0 q}{96 \pi \epsilon_0} (4\sqrt{3} - 2) \quad (3)$$

$$\frac{p_0 q}{64 \pi \epsilon_0} (4\sqrt{3} - 1) \quad (4)$$

۸ - دو استوانهٔ فنروی هادی بلند به شعاع‌های a_1 و a_2 به موازات یکدیگر و به فاصلهٔ x از هم قرار دارند. اگر فاصلهٔ x نسبت به شعاع‌های a_1 و a_2 بزرگ باشد ظرفیت خازن ایجاد شده برای واحد طول استوانه‌ها برابر است با: $C = \frac{\pi \epsilon_0}{\ln \frac{x}{\sqrt{a_1 a_2}}}$ ، اندازهٔ نیروی

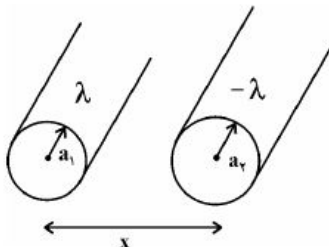
در واحد طول که هر یک از استوانه‌ها به دیگری وارد می‌کند، کدام است؟

$$\frac{\lambda^2}{\pi \epsilon_0} \frac{\sqrt{a_1 a_2}}{x} \quad (1)$$

$$\frac{1}{2} \frac{\lambda^2}{\pi \epsilon_0} \frac{\sqrt{a_1 a_2}}{x} \quad (2)$$

$$\frac{\lambda^2}{\pi \epsilon_0} \frac{1}{x} \quad (3)$$

$$\frac{1}{2} \frac{\lambda^2}{\pi \epsilon_0} \frac{1}{x} \quad (4)$$



۹ - بارهای سطحی یکنواخت ρ_{s1}, ρ_{s2} به ترتیب روی سطوح دو کره متحدالمرکز به شعاع‌های a, b ($b > a$) مفروض هستند. انرژی الکتریکی متقابل را بدست آورید؟

$$\frac{4\pi \rho_{s1} \rho_{s2} b^2 a}{\epsilon_0} \quad (4)$$

$$\frac{4\pi a^2 b^2 \rho_{s1} \rho_{s2}}{\epsilon_0} \quad (3)$$

$$\frac{2\pi a b^2 \rho_{s1} \rho_{s2}}{\epsilon_0} \quad (2)$$

$$\frac{4\pi a^2 b \rho_{s1} \rho_{s2}}{\epsilon_0} \quad (1)$$

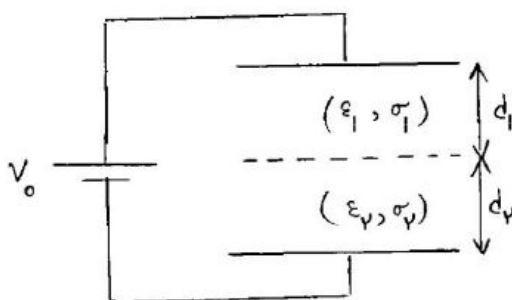
۱۰ - یک خازن مسطح از دو صفحه هادی موازی که به فاصله d از هم قرار دارند تشکیل شده است. بین خازنها مطابق شکل از دو ماده ۱ و ۲ پر شده است. ماده اول دارای مشخصات (ϵ_1, σ_1) و ماده دوم دارای (ϵ_2, σ_2) می باشد. اگر دو سر خازن ولتاژ V_0 قرار گیرد. چگالی بار سطحی آزاد که در فصل مشترک تشکیل می شود، کدام است؟

$$\rho_s = 0 \quad (1)$$

$$\rho_s = \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{d_1 \sigma_2 + d_2 \sigma_1} V_0 \quad (2)$$

$$\rho_s = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{d_1 \sigma_2 + d_2 \sigma_1} V_0 \quad (3)$$

$$\rho_s = \frac{\epsilon_2 \sigma_1 - \epsilon_1 \sigma_2}{d_1 \sigma_2 + d_2 \sigma_1} V_0 \quad (4)$$



۱۱ - کره ای رسانا به شعاع a دارای پتانسیل V_0 می باشد این کره در فضایی با رسانایی $\sigma = \sigma_0 \left(1 + \frac{a}{r}\right)$ قرار دارد تابع پتانسیل الکتریکی در برون کره کدام است؟ (مرجع پتانسیل را بینهایت بگیرید)

$$V_0 \frac{\ln\left(\frac{r+a}{r}\right)}{\ln(2)} \quad (1) \quad V_0 \frac{r+a}{r^2} \quad (2) \quad V_0 \ln\left(\frac{r+a}{r}\right) \quad (3) \quad V_0 \ln\left(\frac{r+a}{r}\right) \quad (4)$$

۱۲ - در مختصات کروی ناحیه $a \leq r \leq b$ از ماده ای با مشخصات (ϵ_1, σ_1) و ناحیه $b \leq r \leq c$ از ماده ای با مشخصات (ϵ_2, σ_2) پر شده است بار الکتریکی Q را در $t=0$ روی سطح $r=b$ قرار داده میشود کدام گزینه جگالی جریان الکتریکی را در این نواحی به درستی نشان می دهد؟

$$\begin{cases} J_1 = -\frac{\sigma_1 Q e^{\frac{-\sigma_1 t}{\epsilon_1}}}{4\pi\epsilon_1 r^2} \hat{a}_r \\ J_2 = \frac{\sigma_2 Q e^{\frac{-\sigma_2 t}{\epsilon_2}}}{4\pi\epsilon_2 r^2} \hat{a}_r \end{cases} \quad (2) \quad \begin{cases} J_1 = \frac{\sigma_1 Q e^{\frac{-\sigma_1 t}{\epsilon_1}}}{4\pi\epsilon_1 r^2} \hat{a}_r \\ J_2 = \frac{\sigma_2 Q e^{\frac{-\sigma_2 t}{\epsilon_2}}}{4\pi\epsilon_2 r^2} \hat{a}_r \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} J_1 = \frac{\sigma_1 Q e^{\frac{-\sigma_1 t}{\epsilon_1}}}{4\pi\epsilon_1 r^2} \hat{a}_r \\ J_2 = \frac{\sigma_2 Q e^{\frac{-\sigma_2 t}{\epsilon_2}}}{4\pi\epsilon_2 r^2} \hat{a}_r \end{cases} \quad (4) \quad \begin{cases} J_1 = 0 \\ J_2 = \frac{\sigma_2 Q e^{\frac{-\sigma_2 t}{\epsilon_2}}}{4\pi\epsilon_2 r^2} \hat{a}_r \end{cases} \quad (3)$$

۱- گزینه «۱» صحیح است.

$$dc = \frac{\epsilon A}{dz} = \frac{\epsilon_0 (d^y + z^y) A}{d^y dz}$$

$$\int \frac{dz}{z^y + d^y} = \frac{1}{d} \tan^{-1} \left(\frac{z}{d} \right) \Big|_z = \frac{1}{d} \tan^{-1} \left(\frac{z}{d} \right)$$

$$C(z) = \frac{\epsilon_0 A}{d^y \left(\frac{1}{d} \tan^{-1} \left(\frac{z}{d} \right) \right)} \Rightarrow C \propto \frac{1}{\tan^{-1} \left(\frac{z}{d} \right)}$$

$$V \propto \frac{1}{C} \Rightarrow V \propto \tan^{-1} \left(\frac{z}{d} \right)$$

$$\frac{V(z)}{V(d)} = \frac{\tan^{-1} \left(\frac{z}{d} \right)}{\tan^{-1} (1)}$$

$$V(z) = \frac{\varphi V_0}{\pi} \tan^{-1} \left(\frac{z}{d} \right) \Rightarrow E = -\nabla V = -\frac{\varphi V_0}{\pi} \frac{d}{(d^y + z^y)} \hat{z}$$

۲- گزینه «۱» صحیح است.

$$\vec{J} = \frac{I}{\varphi \pi R^y} \vec{a}_R \Rightarrow \vec{E} = \frac{\vec{J}}{\sigma} = \frac{I}{\varphi \pi \sigma_0 R} \vec{a}_R$$

$$V(R) - V(R = \varphi a) = -\int_{\varphi a}^R \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\int \frac{I dR}{\varphi \pi \sigma_0 R} = -\frac{I}{\varphi \pi \sigma_0} \ln(R) \Big|_{\varphi a}^R$$

$$V(R) - 0 = \frac{I}{\varphi \pi \sigma_0} \ln \left[\frac{\varphi a}{R} \right]$$

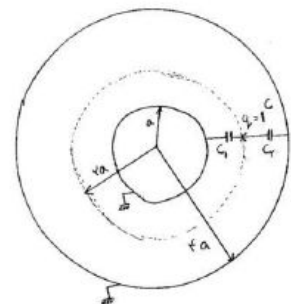
$$V(R = a) = V_0 \Rightarrow V_0 = \frac{I}{\varphi \pi \sigma_0} \ln[\varphi] \Rightarrow \frac{I}{\varphi \pi} = \sigma_0 \frac{V_0}{\ln(\varphi)} \quad \vec{J} = \frac{I}{\varphi \pi R^y} \vec{a}_R = \frac{\sigma_0 V_0}{\ln(\varphi) R^y} \vec{a}_R$$

۳- گزینه «۲» صحیح است.

بار روی کره بزرگتر $-q_v$

$$q \propto C$$

$$\frac{q_v}{q} = \frac{C_v}{C_1 + C_v} = \frac{\frac{\varphi \pi \epsilon_0}{\frac{1}{\varphi a} - \frac{1}{\varphi a}}}{\frac{\varphi \pi \epsilon_0}{\frac{1}{a} - \frac{1}{\varphi a}} + \frac{\varphi \pi \epsilon_0}{\frac{1}{\varphi a} - \frac{1}{\varphi a}}} = \frac{\varphi}{\varphi} \Rightarrow q_v = \frac{\varphi}{\varphi}$$



۴- گزینه «۴» صحیح است.

$$dc = \frac{\epsilon dS_R}{dR} = \frac{\left[\epsilon_0 \left(1 + \frac{a}{R}\right) \sin \theta (1 + \cos \varphi) \right] R^\gamma \sin \theta d\theta d\varphi}{dR}$$

$$\int_a^\infty \frac{dR}{R(R+a)} = \frac{1}{a} \ln\left(\frac{R}{R+a}\right) \Big|_a^\infty = \frac{1}{a} \ln(\gamma)$$

$$\int_0^\pi \sin^\gamma \theta d\theta = \pi$$

$$\int_0^{2\pi} (1 + \cos \varphi) d\varphi = 2\pi$$

$$C = \frac{\epsilon_0 (\pi) (2\pi)}{\frac{1}{a} \ln(\gamma)} = \frac{2\pi^\gamma \epsilon_0 a}{\ln(\gamma)}$$

$$V = \frac{Q_0}{C} = \frac{(\pi \epsilon_0 a V_0)}{\frac{2\pi^\gamma \epsilon_0 a}{\ln(\gamma)}} = \frac{\gamma}{\pi} \ln(\gamma) V_0$$

۵- گزینه «۲» صحیح است.

$$\nabla \cdot D = \rho$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rD) = r \Rightarrow \frac{\partial}{\partial r} (rD) = r^\gamma \Rightarrow rD = \frac{r^\gamma}{\gamma} + c \xrightarrow{D(r=0)=0} c = 0$$

$$D = \frac{r^\gamma}{\gamma}$$

$$w = \frac{1}{\gamma \epsilon_0} |D|^\gamma = \frac{1}{\gamma \epsilon_0} (r^\gamma)^\gamma$$

$$W = \int w dV = \int \frac{1}{\gamma \epsilon_0} (r^\gamma)^\gamma \gamma \pi r \ell dr$$

$$\frac{W}{\ell} = \frac{\pi}{\gamma \epsilon_0} \left(\frac{r^\gamma}{\gamma} \right)^\gamma = \frac{\pi a^\gamma}{\gamma \epsilon_0}$$

۶- گزینه «۲» صحیح است.

$$dC = \frac{\epsilon dS_z}{dz}$$

$$dR = \frac{dz}{\sigma dS_z} = \frac{dz}{\left[\sigma_0 \left(1 + \frac{1}{r}\right) (1 + z^\gamma) (1 + \cos^\gamma \varphi) \right] r dr d\varphi}$$

$$\int (r + 1) dr = \frac{r^\gamma}{\gamma} + r \Big|_1^\gamma = \frac{\delta}{\gamma}$$

$$\int \frac{dz}{z^2 + 1} = \tan^{-1}(z) \Big|_1^1 = \tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{4}$$

$$\int_0^{2\pi} (1 + \cos^2 \varphi) d\varphi = \int_0^{2\pi} (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\varphi) d\varphi = 3\pi$$

$$R = \frac{\frac{\pi}{4}}{\sigma_0 \left(\frac{\Delta}{r}\right) (2\pi)} = \frac{1}{2 \cdot \sigma_0}$$

۷- گزینه «۱» صحیح است.

$$F = q\vec{E} = \frac{|P|q}{4\pi\epsilon_0 R^2} [\cos\theta \vec{a}_R + \sin\theta \vec{a}_\theta]$$

$$W = - \int_{\text{start}}^{\text{end}} \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = - \int \frac{|P|q}{4\pi\epsilon_0 R^2} [\cos\theta \vec{a}_R + \sin\theta \vec{a}_\theta] \cdot (dR \vec{a}_R + R d\theta \vec{a}_\theta)$$

$$W_1 = - \int \frac{p_0 q \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 R^2} dR = \frac{p_0 q \sqrt{r}}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{2R^2} \right)_r = \frac{p_0 q}{8\pi\epsilon_0} \left(\frac{\sqrt{r}}{16} \right)$$

$$W_2 = - \int \frac{p_0 q \sin\theta}{4\pi\epsilon_0 (r)^2} d\theta = \frac{p_0 q}{16\pi\epsilon_0} (\cos\theta)_r = \frac{p_0 q}{16\pi\epsilon_0} \left(\frac{1 - \sqrt{r}}{2} \right)$$

$$W = W_1 + W_2 = \frac{p_0 q}{8\pi\epsilon_0} \left(\frac{\sqrt{r} + 1 - \sqrt{r}}{16} \right) = \frac{p_0 q}{128\pi\epsilon_0} (1 - \sqrt{r})$$

۸- گزینه «۴» صحیح است.

$$W = \frac{1}{2} \frac{\lambda^2}{C} \quad F_Q = \frac{dW}{dx} = \pi\epsilon_0 \left[\frac{\frac{1}{\sqrt{a_1 a_r}}}{\left(\frac{x}{\sqrt{a_1 a_r}} \right)} \right] = \frac{\lambda^2}{2\pi\epsilon_0 x}$$

۹- گزینه «۱» صحیح است.

$$W_{r1} = \int v_r dq_1 = v_r Q_1 \Rightarrow W_{r1} = \frac{Q_r}{4\pi\epsilon_0 b} Q_1 = \frac{(4\pi b^2) \rho_{s_r} \cdot \rho_{s_1} (4\pi a^2)}{4\pi\epsilon_0 b} = \frac{4\pi \rho_{s_1} \rho_{s_r} a^2 b}{\epsilon_0}$$

۱۰- گزینه «۴» صحیح است.

$$\left. \begin{aligned} V_0 &= E_1 d_1 + E_2 d_2 \\ J_1 &= J_2 \Rightarrow \sigma_1 E_1 = \sigma_2 E_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} E_1 = \frac{\sigma_2}{d_1 \sigma_2 + d_2 \sigma_1} V_0 \\ E_2 = \frac{\sigma_1}{d_1 \sigma_2 + d_2 \sigma_1} V_0 \end{cases}$$

$$\rho_S = D_{\gamma n} - D_{in} = \epsilon_{\gamma} E_{\gamma n} - \epsilon_i E_{in} = \frac{\epsilon_{\gamma} \sigma_i - \epsilon_i \sigma_{\gamma}}{d_i \sigma_{\gamma} + d_{\gamma} \sigma_i} V_0$$

۱۱- گزینه «۱» صحیح است.

$$dR = \frac{dr}{\sigma dS_r} = \frac{dr}{\sigma_0 \left(1 + \frac{a}{r}\right) r^{\gamma} \sin \theta d\theta d\varphi}$$

$$\int \frac{dr}{r(r+a)} = \frac{1}{a} \text{Ln}\left(\frac{r}{r+a}\right) \Bigg|_r^{\infty} = \frac{1}{a} \text{Ln}\left(\frac{r+a}{r}\right)$$

$$\int_0^{\pi} \sin \theta d\theta = 2$$

$$R(r) = \frac{a \text{Ln}\left(\frac{r+a}{r}\right)}{\sigma_0 4\pi}$$

$$\frac{V(r-\infty)}{V_0} = \frac{R(r-\infty)}{R(a-\infty)} = \frac{\text{Ln}\left(\frac{r+a}{r}\right)}{\text{Ln}(2)}$$

$$V(r) = V_0 \frac{\text{Ln}\left(\frac{r+a}{r}\right)}{\text{Ln}(2)}$$

۱۲- گزینه «۳» صحیح است.

$$\left. \begin{aligned} Q_s(t) &= A e^{\frac{-\sigma_{\gamma} t}{\epsilon_{\gamma}}} + B \\ Q_s(t=0) &= Q = A + B \\ Q_s(t=\infty) &= B \end{aligned} \right\} \Rightarrow Q_s(t) = Q e^{\frac{-\sigma_{\gamma} t}{\epsilon_{\gamma}}}$$

$$E_{\gamma} = \frac{Q_s(t)}{4\pi\epsilon_{\gamma} r^{\gamma}} \hat{a}_r = \frac{Q e^{\frac{-\sigma_{\gamma} t}{\epsilon_{\gamma}}}}{4\pi\epsilon_{\gamma} r^{\gamma}} \hat{a}_r \xrightarrow{J=\sigma E} J_{\gamma} = \frac{\sigma_{\gamma} Q e^{\frac{-\sigma_{\gamma} t}{\epsilon_{\gamma}}}}{4\pi\epsilon_{\gamma} r^{\gamma}} \hat{a}_r$$

$$\left\{ \begin{aligned} J_i &= 0 \\ J_{\gamma} &= \frac{\sigma_{\gamma} Q e^{\frac{-\sigma_{\gamma} t}{\epsilon_{\gamma}}}}{4\pi\epsilon_{\gamma} r^{\gamma}} \hat{a}_r \end{aligned} \right.$$