

الکترومغناطیس

۱ - کره‌ای به شعاع a ($a \ll 1$) دارای قطبی‌شدگی ثابت $P = P_0 \hat{z}$ می‌باشد. اگر مرکز کره در مبدأ مختصات و در فضای آزاد باشد.

پتانسیل الکتریکی در نقطه $(1, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{8})$ در مختصات کروی کدام است؟

$$\begin{array}{llll} \frac{P_0 a^2}{\epsilon_0} & (1) & \frac{P_0 a^2}{6\epsilon_0} & (2) \\ \frac{P_0 a^2}{3\epsilon_0} & (3) & \frac{P_0 a^2}{2\epsilon_0} & (4) \end{array}$$

۲ - کره‌ای به شعاع a در مبدأ مختصات مفروض است. در نیم کره بالایی ($z > 0$) بار سطحی با چگالی ρ_s و در نیم کره پائینی

$z < 0$ بار سطحی با چگالی $-2\rho_s$ قرار گرفته است. پتانسیل الکتریکی در مبدأ کدام است؟

$$\begin{array}{llll} \frac{\rho_s a}{2\epsilon_0} & (1) & \frac{-\rho_s a}{\epsilon_0} & (2) \\ \frac{-\rho_s a}{2\epsilon_0} & (3) & \text{صفر} & (4) \end{array}$$

۳ - صفحه‌ای $x = 0$ دو ناحیه‌ی همگن را از یکدیگر جدا نموده است. ناحیه‌ی $x < 0$ عایق با ضریب گذردگی $\epsilon_1 = 4\epsilon_0$ پر شده

و میدان الکتریکی $\vec{D} = (\hat{x} + \hat{y} + \hat{z})$ نیز در این ناحیه وجود دارد. در ناحیه‌ی $x > 0$ که با عایق $\epsilon_2 = 2\epsilon_0$ پر شده است،

بردار قطبی‌شدگی \vec{P} کدام است؟

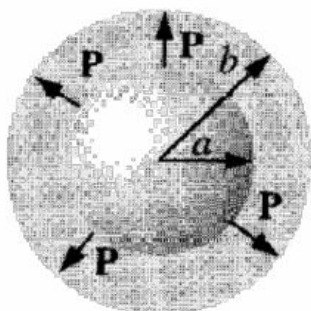
$$\begin{array}{ll} \hat{x} + \frac{1}{2}\hat{y} + \frac{1}{2}\hat{z} & (1) \\ \frac{1}{2}\hat{x} + \frac{1}{4}\hat{y} + \frac{1}{2}\hat{z} & (2) \\ \frac{1}{2}\hat{x} + \frac{1}{4}\hat{y} + \frac{1}{4}\hat{z} & (3) \\ \frac{1}{2}\hat{x} + \frac{1}{4}\hat{y} + \frac{1}{4}\hat{z} & (4) \end{array}$$

۴ - بر روی کره‌ای رسانا به شعاع a و دارای بار Q ، عایقی با ضریب حساسیت الکتریکی $\epsilon_r = 4$ و ضخامت a قرار داده ایم.

پتانسیل الکتریکی در مرکز کره کدام است؟

$$\begin{array}{llll} \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 a} & (1) & \frac{9Q}{160\pi\epsilon_0 a} & (2) \\ \frac{19Q}{160\pi\epsilon_0 a} & (3) & \frac{18Q}{91\pi\epsilon_0 a} & (4) \end{array}$$

۵ - یک پوسته‌کروی به شعاع داخلی a و شعاع خارجی b با ماده‌ای دی‌الکتریک با قطبی‌شدگی $P(r) = \frac{k}{r} \hat{r}$ پر شده است



شدت میدان الکتریکی در ناحیه عایق کدام است؟

$$\begin{array}{ll} E = \frac{-k}{\epsilon_0 r} \hat{r} & (1) \\ E = \frac{-k}{3\epsilon_0 r} \hat{r} & (2) \\ E = \frac{k}{3\epsilon_0 r} \hat{r} & (3) \\ E = \frac{k}{\epsilon_0 r} \hat{r} & (4) \end{array}$$

۶ - بار سطحی چگالی $\rho_s = r^2$ بر روی دیسکی به شعاع a و مرکز مبدأ مختصات (دیسک در صفحه‌ی xy قرار دارد) توزیع شده است. پتانسیل الکتریکی در مبدأ مختصات کدام است؟

(۱) $\frac{a^2}{2\epsilon_0}$ (۲) $\frac{a^2}{4\epsilon_0}$ (۳) $\frac{a^2}{6\epsilon_0}$ (۴) $\frac{a^2}{12\epsilon_0}$

۷ - ناحیه $3 \leq Z$ و $\theta \leq \frac{\pi}{3}$ از عایقی با ضریب حساسیت $\chi_e = 3$ پر شده است. بار نقطه‌ای q در مبدأ مختصات قرار دارد که باعث قطبی‌شدگی این ناحیه خواهد شد. بار سطحی مفید در $Z = 3$ چند کولن است؟

(۱) $-\frac{3}{16}q$ (۲) $-\frac{3}{8}q$ (۳) $-\frac{1}{16}q$ (۴) $-\frac{3}{8}q$

۸ - دوقطبی الکتریکی میکروسکوپی $\vec{p} = p\hat{z}$ در مبدأ مختصات قرار دارد کره‌ای فرضی به شعاع a و مرکز مبدأ مختصات را در نظر بگیرید شار الکتریکی عبوری از قسمتی از کره که در ناحیه $\theta \leq \frac{\pi}{3}$ قرار دارد، چند کولن است؟

(۱) $\frac{\sqrt{3}}{4}p$ (۲) $\frac{3}{8}p$ (۳) $\frac{\sqrt{3}}{8}p$ (۴) $\frac{1}{8}p$

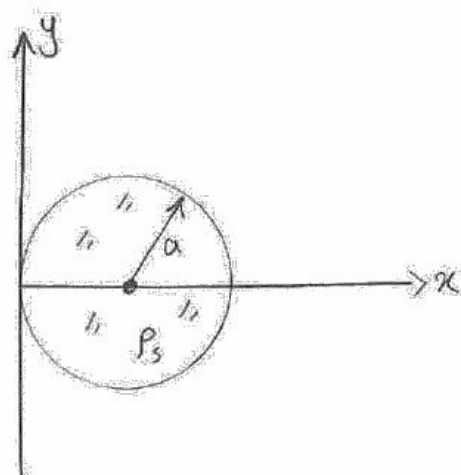
۹ - بر روی نیم کره‌ی $\theta \leq \frac{\pi}{2}$, $R = 1$ بار الکتریکی با چگالی یکنواخت ρ_s قرار دارد پتانسیل الکتریکی در نقطه $(R = 1, \theta = \pi, \phi = 0)$ کدام است؟

(۱) $\frac{\rho_s}{2\epsilon_0}$ (۲) $\frac{\sqrt{2}\rho_s}{2\epsilon_0}$ (۳) $\frac{\rho_s}{\epsilon_0} \left(\frac{2 - \sqrt{2}}{4} \right)$ (۴) $\frac{\rho_s}{\epsilon_0} \left(\frac{2 - \sqrt{2}}{2} \right)$

۱۰ - کره‌ای به شعاع a دارای بار حجمی با چگالی غیر یکنواخت $\rho = R^2$ به مرکز مبدأ مختصات مفروض است پتانسیل در مرکز کره کدام است؟ (مرجع پتانسیل را بینهایت در نظر بگیرید)

(۱) $\frac{3a^4}{4\epsilon_0}$ (۲) $\frac{a^4}{4\epsilon_0}$ (۳) $\frac{a^4}{5\epsilon_0}$ (۴) $\frac{7a^4}{15\epsilon_0}$

۱۱ - مطابق شکل زیر بار الکتریکی با چگالی سطحی یکنواخت ρ_s بر روی دیسکی به شعاع a توزیع شده است پتانسیل الکتریکی در مبدأ مختصات کدام است؟ (مرجع پتانسیل را بینهایت در نظر بگیرید)



(۱) $\frac{\rho_s a}{\pi \epsilon_0}$

(۲) $\frac{\rho_s a}{2 \epsilon_0}$

(۳) $\frac{\rho_s a}{\epsilon_0}$

(۴) $\frac{2\rho_s a}{\epsilon_0}$

۱۲- در مبدا مختصات دوقطبی های الکتریکی میکروسکوپی با بردار گشتاور های $p_1 = p\hat{x}$ و $p_2 = p\hat{y}$ مفروضند شدت میدان

الکتریکی در نقطه $(r = a, \varphi = \frac{\pi}{6}, \circ)$ در مختصات استوانه ای کدام است

$$\frac{p}{16\pi\epsilon_0 a^3} \left((\Delta - 3\sqrt{3})\hat{a}_x + (3\sqrt{3} + 1)\hat{a}_y \right) \quad (1)$$

$$\frac{p}{16\pi\epsilon_0 a^3} \left((\Delta + 3\sqrt{3})\hat{a}_x + (3\sqrt{3} + 1)\hat{a}_y \right) \quad (2)$$

$$\frac{p}{16\pi\epsilon_0 a^3} \left((\Delta + 3\sqrt{3})\hat{a}_x + (3\sqrt{3} - 1)\hat{a}_y \right) \quad (3)$$

$$\frac{p}{16\pi\epsilon_0 a^3} \left((\Delta - 3\sqrt{3})\hat{a}_x + (3\sqrt{3} - 1)\hat{a}_y \right) \quad (4)$$

الکترومغناطیس

۱- گزینه «۱» صحیح است.

$$\vec{p} = \int \vec{P} dV = (P_0 \hat{z}) \frac{4\pi}{3} a^3$$

$$V = \frac{|p| \cos \theta}{4\pi \epsilon_0 R^2} = \frac{\left(P_0 \frac{4\pi}{3} a^3 \right) \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)}{4\pi \epsilon_0 (1)^2} = \frac{P_0 a^3}{6\epsilon_0}$$

۲- گزینه «۳» صحیح است.

$$\left. \begin{aligned} V^+ &= \frac{\rho_s a}{2\epsilon_0} \\ V^- &= \frac{-2\rho_s a}{2\epsilon_0} = \frac{-\rho_s a}{\epsilon_0} \end{aligned} \right\} \Rightarrow V = V^+ + V^- = \frac{-\rho_s a}{2\epsilon_0}$$

۳- گزینه «۴» صحیح است.

$$\vec{P}_r = \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) \vec{E}_r = \epsilon_0 \vec{E}_r$$

$$D_{rn} = D_{in} \rightarrow \epsilon_0 \epsilon_r E_{rx} = D_{in} \Rightarrow E_{rx} = \frac{D_{in}}{\epsilon_0 \epsilon_r} = \frac{1}{2\epsilon_0}$$

$$E_{it} = E_{rt} \rightarrow E_{rt} = \frac{D_{it}}{\epsilon_r \epsilon_0} \rightarrow \vec{E}_{rt} = \frac{1}{4\epsilon_0} (\hat{y} + \hat{z})$$

$$\vec{P}_r = \left[\frac{1}{2} \hat{x} + \frac{1}{4} \hat{y} + \frac{1}{4} \hat{z} \right]$$

۴- گزینه «۳» صحیح است.

$$D = \begin{cases} 0 & R < a \\ \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_r R^2} & a < R < 2a \\ \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 R^2} & 2a < R \end{cases}$$

$$\epsilon_r = 1 + \chi_e = 5$$

$$V = \int_{\infty}^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \int_{\infty}^{2a} \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 R^2} dR + \int_{2a}^a \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_r R^2} dR + \int_a^{\infty} 0 \cdot d\vec{\ell} = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 (2a)} + \frac{Q}{2 \cdot \pi \epsilon_0} \left(\frac{1}{2a} - \frac{1}{a} \right) + 0 = \frac{19Q}{160 \pi \epsilon_0 a}$$

۵- گزینه «۲» صحیح است.

با توجه به رابطه $\oint \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_{in}$ و اینکه $Q_{in} = 0$ است می توان نتیجه گرفت که :

$$D = \cdot \Rightarrow \epsilon_0 E + P = \cdot \Rightarrow E = \frac{-P}{\epsilon_0} = \frac{-k}{\epsilon_0 r} \hat{r}$$

۶- گزینه «۳» صحیح است.

$$V = \int \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0 |\vec{R}|} = \int \frac{\rho_s dS}{4\pi\epsilon_0 r} = \int \frac{r^\gamma r dr d\varphi}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{(\gamma\pi)}{4\pi\epsilon_0} \int_a^b r^\gamma dr = \frac{1}{2\epsilon_0} \frac{a^\gamma}{\gamma} = \frac{a^\gamma}{2\epsilon_0}$$

۷- گزینه «۱» صحیح است.

$$\epsilon_r = 1 + \chi = 4$$

$$Q_{sb} = -\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \Phi_D = -\frac{\gamma}{4} \times \frac{q}{\gamma} (1 - \cos \varphi) = \frac{-\gamma}{16} q$$

۸- گزینه «۲» صحیح است.

$$\vec{D} = \frac{p}{4\pi R^\gamma} (\gamma \cos \theta \hat{a}_R + \sin \theta \hat{a}_\theta)$$

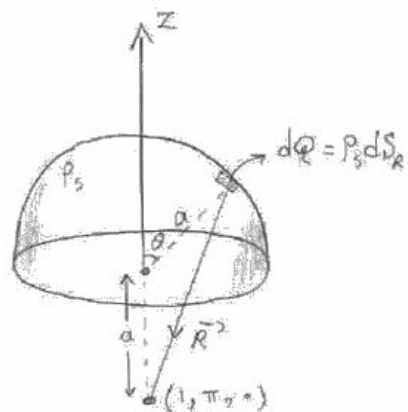
$$\varphi = \int \vec{D} \cdot d\vec{S}_R = \int \frac{p}{4\pi R^\gamma} \gamma \cos \theta \hat{a}_R \cdot \hat{a}_R R^\gamma \sin \theta d\theta d\varphi = \int \frac{p}{4\pi} \gamma \cos \theta \sin \theta d\theta d\varphi = \frac{p}{\gamma} (\sin^\gamma \theta) \Big|_0^\pi = \frac{\gamma}{\lambda} p$$

۹- گزینه «۴» صحیح است.

$$|\vec{R}| = r \times 1 \sin\left(\frac{180^\circ - \theta}{\gamma}\right) = r \cos\left(\frac{\theta}{\gamma}\right), \quad dQ = \rho_s dS_R = \rho_s (1)^\gamma \sin \theta d\theta d\varphi$$

$$V = \int \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0 |\vec{R}|} = \int \frac{\rho_s (1)^\gamma \sin \theta d\theta d\varphi}{4\pi\epsilon_0 (r \cos(\frac{\theta}{\gamma}))} = \frac{\rho_s}{\gamma\epsilon_0} \int \sin(\frac{\theta}{\gamma}) d\theta$$

$$V = \frac{\rho_s}{\gamma\epsilon_0} \left(-\gamma \cos(\frac{\theta}{\gamma}) \right) \Big|_0^{90^\circ} = \frac{\rho_s}{\epsilon_0} \left(1 - \frac{\sqrt{\gamma}}{\gamma} \right) = \frac{\rho_s}{\epsilon_0} \left(\frac{\gamma - \sqrt{\gamma}}{\gamma} \right)$$



۱۰- گزینه «۲» صحیح است.

$$V(R=a) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a}$$

$$Q = \int \rho dv = \int R^\gamma (R^\gamma \sin \theta dR d\theta d\varphi) = \left(\frac{R^\Delta}{\Delta} \right)^a (-\cos \theta)^\pi (\gamma\pi) = \frac{4\pi a^\Delta}{\Delta}$$

$$V(R=a) = \frac{\frac{4\pi a^\Delta}{\Delta}}{4\pi\epsilon_0 a} = \frac{a^\gamma}{\Delta\epsilon_0}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_{in} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow \frac{1}{R^\gamma} \frac{d(R^\gamma E_R)}{dR} = \frac{R^\gamma}{\epsilon_0} \Rightarrow R^\gamma E_R = \frac{R^\delta}{\delta \epsilon_0} + c$$

$$E(R = \cdot) = \cdot \Rightarrow c = \cdot$$

$$\vec{E} = \frac{R^\gamma}{\delta \epsilon_0} \hat{a}_R$$

$$V(R = \cdot) = V(R = a) + \left(- \int_a^\cdot \vec{E}_{in} \cdot d\vec{\ell} \right) = V(R = a) + \left(- \int_a^\cdot \frac{R^\gamma}{\delta \epsilon_0} \hat{a}_R \cdot \hat{a}_R dR \right) = V(R = a) + \left(\frac{a^\gamma}{\gamma \cdot \epsilon_0} \right)$$

$$V(R = \cdot) = \frac{a^\gamma}{\delta \epsilon_0} + \frac{a^\gamma}{\gamma \cdot \epsilon_0} = \frac{a^\gamma}{\gamma \epsilon_0}$$

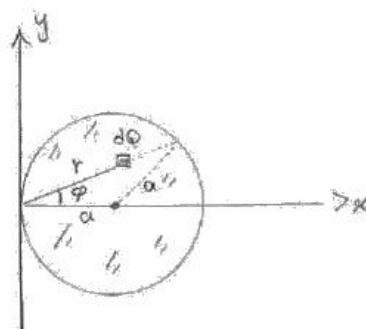
نکته: مسئله فوق را برای $\rho = R^n$ ($n > -2$) اگر تکرار نمایید جواب به صورت $V(R = \cdot) = \frac{a^{n+2}}{(n+2)\epsilon_0}$ خواهد شد

۱۱- گزینه «۱» صحیح است.

$$|\vec{R}| = r, \quad dQ = \rho_s dS = \rho_s r dr d\varphi$$

$$V = \int \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0 |\vec{R}|} = \iint \frac{\rho_s r dr d\varphi}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{\rho_s}{4\pi\epsilon_0} \int \left(\int_0^{2a \cos \varphi} dr \right) d\varphi$$

$$= \frac{\rho_s}{4\pi\epsilon_0} \int 2a \cos \varphi d\varphi = \frac{\rho_s a}{2\pi\epsilon_0} (\sin \varphi)_{-\pi/2}^{+\pi/2} = \frac{\rho_s a}{\pi\epsilon_0}$$



۱۲- گزینه «۳» صحیح است.

با توجه به رابطه شماره (۳-۱۰۳) صفحه ۲۰۱ کتاب الکترواستاتیکیک (دیوید گریفیث) میدان ناشی از یک دوقطبی الکتریکی مستقل از مختصات به صورت زیر است:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R^\gamma} (\gamma(\vec{p} \cdot \hat{a}_R) \hat{a}_R - \vec{p})$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^\gamma} (\gamma(\vec{p} \cdot \hat{a}_r) \hat{a}_r - \vec{p}) \quad : \text{in } xoy \quad R \rightarrow r$$

$$\vec{E}_T = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^\gamma} ((\gamma(\vec{p}_1 \cdot \hat{a}_r) \hat{a}_r - \vec{p}_1) + (\gamma(\vec{p}_2 \cdot \hat{a}_r) \hat{a}_r - \vec{p}_2)) \quad [r = a, \varphi = \gamma]$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 a^\gamma} ((\gamma(p \cos \gamma)(\cos \gamma \cdot \hat{a}_x + \sin \gamma \cdot \hat{a}_y) - p \hat{a}_x) + (\gamma(p \sin \gamma)(\cos \gamma \cdot \hat{a}_x + \sin \gamma \cdot \hat{a}_y) - p \hat{a}_y))$$

$$= \frac{p}{4\pi\epsilon_0 a^\gamma} \left((\gamma(\frac{\sqrt{\gamma}}{\gamma})(\frac{\sqrt{\gamma}}{\gamma} \hat{a}_x + \frac{1}{\gamma} \hat{a}_y) - \hat{a}_x) + (\gamma(\frac{1}{\gamma})(\frac{\sqrt{\gamma}}{\gamma} \hat{a}_x + \frac{1}{\gamma} \hat{a}_y) - \hat{a}_y) \right)$$

$$= \frac{p}{16\pi\epsilon_0 a^\gamma} ((\gamma + \gamma\sqrt{\gamma}) \hat{a}_x + (\gamma\sqrt{\gamma} - \gamma) \hat{a}_y)$$