

## الکترومغناطیس

۱ - ناحیه‌ی  $a \leq R \leq 2a$  در مختصات کروی دارای بار الکتریکی با چگالی حجمی  $\rho = R^2$  کولن بر مترمکعب می‌باشد شدت میدان الکتریکی در  $R = 2a$  کدام است؟

$$(1) \frac{31a^2}{20\epsilon_0} \quad (2) \frac{8a^2}{5\epsilon_0} \quad (3) \frac{8a^2}{3\epsilon_0} \quad (4) \frac{31a^2}{5\epsilon_0}$$

۲ - ناحیه‌ی  $0 \leq R \leq a$  و  $0 \leq \theta \leq \pi$  و  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$  دارای بار حجمی با چگالی یکنواخت  $\rho$  می‌باشد. اندازه‌ی شدت میدان الکتریکی در نقطه‌ی  $(R, \theta, \varphi) = (a, \pi, 0)$  کدام است؟

$$(1) \frac{\rho a}{2\epsilon_0} \left( \pi + 2\sqrt{2} \right) \quad (2) \frac{\rho a}{3\epsilon_0} \left( \pi + \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 \right)$$

$$(3) \frac{\rho a}{4\epsilon_0} \left( \pi + 2\sqrt{2} - 4 \right) \quad (4) \frac{\rho a}{8\epsilon_0} (3\pi - 4)$$

۳ - بار الکتریکی با چگالی سطحی غیریکنواخت  $\rho_s = x^2 y^2$  روی صفحه‌ی  $z = 1$  توزیع شده است. بار موجود در داخل مخروط  $\theta \leq \frac{\pi}{4}$  چقدر است؟

$$(1) \frac{\pi}{16} \quad (2) \frac{\pi}{32} \quad (3) \frac{\pi}{24} \quad (4) \frac{\pi}{48}$$

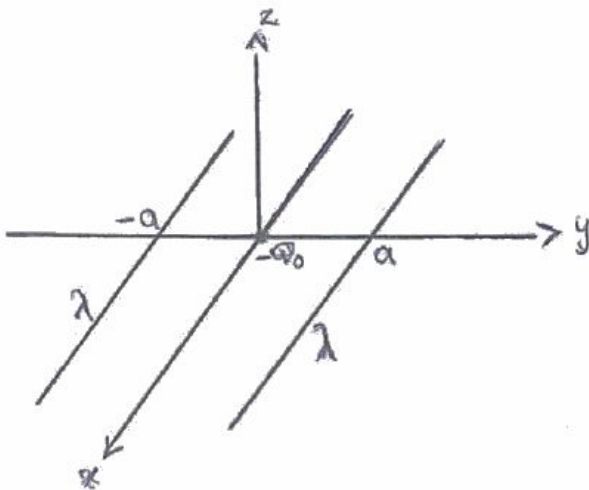
۴ - بار الکتریکی با چگالی  $\rho_s = r \cos \varphi$  بر روی ناحیه‌ی  $r \leq a$  در مختصات استوانه‌ای توزیع شده است. اندازه‌ی شدت میدان الکتریکی در نقطه‌ی  $(0, 0, a)$  کدام است؟

$$(1) \left[ \frac{\sqrt{2}-1}{8\epsilon_0} \right] a \quad (2) \left( \frac{3\sqrt{2}-4}{16\epsilon_0} \right) a \quad (3) \left( \frac{3\sqrt{2}-4}{8\epsilon_0} \right) a \quad (4) \left( \frac{3\sqrt{2}-2}{8\epsilon_0} \right) a$$

۵ - یک حلقه مربعی شکل به ضلع  $2a$  و مرکز مبدأ مختصات در صفحه  $xy$  مفروض است اگر اضلاع مربع دارای بار الکتریکی با چگالی یکنواخت  $\lambda$  باشد، مقدار شدت میدان الکتریکی ناشی از این توزیع بار بر روی محور  $z$ ها در نقطه‌ی  $z = a$  کدام است؟

$$(1) \frac{\lambda}{\sqrt{3}\pi\epsilon_0 a} \quad (2) \frac{\lambda}{\sqrt{2}\pi\epsilon_0 a} \quad (3) \frac{\lambda}{\pi\epsilon_0 a} \quad (4) \frac{\sqrt{2}\lambda}{\pi\epsilon_0 a}$$

۶ - دو سیم نامتناهی طویل و موازی با محور  $x$  ها، در صفحه  $xy$  و در  $y = \pm a$  قرار گرفته‌اند و دارای چگالی خطی مثبت  $\lambda$  می‌باشند. بار نقطه‌ای منفی  $(-Q_0)$  به جرم  $m$  در مبدأ مختصات واقع شده است. فرکانس نوسانات این بار برای جابه‌جایی‌های کوچک در راستای محور  $z$  ها چند  $\text{Hz}$  است؟



$$\frac{\gamma\pi}{a} \sqrt{\frac{\lambda Q_0}{\gamma m \pi \epsilon_0}} \quad (1)$$

$$\frac{\gamma\pi}{a} \sqrt{\frac{\gamma \lambda Q_0}{m \pi \epsilon_0}} \quad (2)$$

$$\frac{\gamma\pi}{a} \sqrt{\frac{\gamma \lambda Q_0}{m \pi \epsilon_0}} \quad (3)$$

$$\frac{\gamma\pi}{a} \sqrt{\frac{\lambda Q_0}{m \pi \epsilon_0}} \quad (4)$$

۷ - اگر  $r$  فاصله از مبدأ مختصات باشد مقدار انتگرال زیر کدام است؟ (ن: حجم کره‌ای به شعاع  $a$  و مرکز مبدأ مختصات است)

$$I = \int_V \left( \frac{\mathbf{r}^2}{\mathbf{r}^2 + 4} \right) \nabla \cdot \left( \frac{\hat{\mathbf{r}}}{\mathbf{r}^2} \right) dV$$

$$\pi \quad (4)$$

$$2\pi \quad (3)$$

$$8\pi \quad (2)$$

$$4\pi \quad (1)$$

۸ - اگر میدان الکتریکی در مختصات کروی به صورت  $\vec{E} = \frac{\hat{\mathbf{r}} + (\sin \theta \cos \phi) \hat{\phi}}{r}$  باشد، مقدار چگالی بار حجمی در نقطه‌ای  $\left(0, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\right)$  کدام است؟

$$8 \epsilon_0 \quad (4)$$

$$6 \epsilon_0 \quad (3)$$

$$3 \epsilon_0 \quad (2)$$

$$2 \epsilon_0 \quad (1)$$

۹ - در ناحیه‌ی  $|z| \leq h$  بار الکتریکی با چگالی حجمی  $\rho = 1 - \frac{|z|}{h}$  توزیع شده است. نسبت شدت میدان الکتریکی در  $z = \frac{h}{2}$  به شدت میدان الکتریکی در  $z = 2h$  کدام است؟

$$1 \quad (4)$$

$$\frac{3}{4} \quad (3)$$

$$\frac{1}{2} \quad (2)$$

$$\frac{1}{4} \quad (1)$$

۱۰- بار الکتریکی با چگالی یکنواخت  $\rho_\ell$  بر روی حلقه‌ای به شعاع  $a$  و مرکز مبدأ مختصات و واقع در صفحه‌ی  $xy$  مفروض است. ماکزیمم شدت میدان الکتریکی روی محور  $z$ ها کدام است؟

$$(1) \frac{\rho_\ell}{3\sqrt{3}\epsilon_0 a} \quad (2) \frac{\rho_\ell}{2\sqrt{2}\epsilon_0 a} \quad (3) \frac{\rho_\ell}{6\sqrt{3}\epsilon_0 a} \quad (4) \frac{\rho_\ell}{\sqrt{6}\epsilon_0 a}$$

۱۱- بار الکتریکی با چگالی  $P_s$  بر روی نیم کره‌ی  $\theta \leq \frac{\pi}{4}$  و  $R = a$  توزیع شده است، شدت میدان الکتریکی در نقطه‌ی  $(R = 2a, \theta = 0, \varphi = 0)$  کدام است؟

$$(1) \frac{P_s}{32\epsilon_0} (3 \ln 5 + 4) \hat{z} \quad (2) \frac{P_s}{32\epsilon_0} (3 \ln 5 + 2) \hat{z}$$

$$(3) \frac{P_s}{16\epsilon_0} (3 \ln 5 + 2) \hat{z} \quad (4) \frac{P_s}{16\epsilon_0} (3 \ln 5 + 4) \hat{z}$$

۱۲- تابع اسکالر  $T = xy^2$  مفروض است حاصل انتگرال  $\int_A^B (\nabla T) \cdot d\vec{\ell}$  کدام است؟

$A(0,0,0)$  و  $B(2,1,2)$  در مختصات دکارتی می‌باشد)

$$(1) 1 \quad (2) 2 \quad (3) 3 \quad (4) 4$$

## الکترومغناطیس

۱- گزینه «۱» صحیح است.

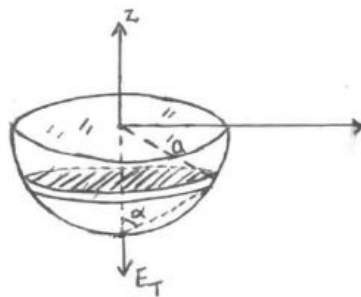
$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} [R^2 E_R] = \frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial R} [R^2 E_R] = \frac{\rho R^2}{\epsilon_0}$$

$$R^2 E_R = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0} + C$$

$$E(R=a) = 0 \Rightarrow 0 = \frac{\rho a^3}{3\epsilon_0} + C \Rightarrow C = -\frac{\rho a^3}{3\epsilon_0}$$

$$R^2 E_R = \frac{\rho}{3\epsilon_0} (R^3 - a^3) \Rightarrow E = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \left( \frac{R^3 - a^3}{R^2} \right)$$

$$E(R=r) = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \frac{r^3 - a^3}{r^2} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \left( r - \frac{a^3}{r^2} \right)$$



۲- گزینه «۳» صحیح است.

به دلیل تقارن مشخص است که:

میدان در نقطه‌ی موردنظر در جهت  $(-\hat{z})$  می‌باشد.

$$dE = \frac{\rho_s}{\epsilon_0} (1 - \cos \alpha) (-\hat{z})$$

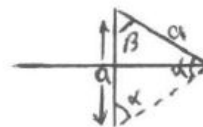
$$r\alpha + \beta = \pi \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{r} - \frac{\beta}{r}$$

$$\cos \alpha = \cos \left( \frac{\pi}{r} - \frac{\beta}{r} \right) = \sin \left( \frac{\beta}{r} \right), \quad \rho_s = \rho d\ell = \rho a d\beta$$

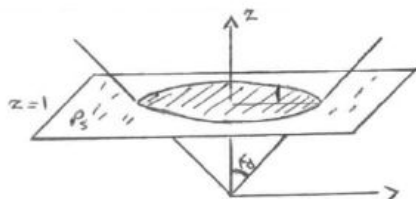
$$dE = \frac{\rho a d\beta}{\epsilon_0} \left( 1 - \sin \left( \frac{\beta}{r} \right) \right) (-\hat{z})$$

$$E = \int dE = \frac{\rho a}{\epsilon_0} \left( \beta + r \cos \frac{\beta}{r} \right) \Big|_0^{\pi} (-\hat{z}) = \frac{\rho a}{\epsilon_0} \left( \frac{\pi}{r} + \sqrt{r} - r \right) (-\hat{z})$$

$$|E| = \frac{\rho a}{\epsilon_0} (\pi + \sqrt{r} - r)$$



۳- گزینه «۳» صحیح است.



برخورد صفحه‌ی  $z=1$  و مخروط دیسکی به شعاع ۱ خواهد بود.

$$Q = \int \rho_s dS_z = \int (x^2 y^2) r dr d\phi = \int (r \cos \phi)^2 (r \sin \phi)^2 r dr d\phi$$

$$= \int_0^1 r^6 \sin^2 \phi \cos^2 \phi dr d\phi = \left[ \frac{r^7}{7} \right]_0^1 \int_0^{2\pi} \sin^2 \phi \cos^2 \phi d\phi$$

$$= \frac{1}{7} \times \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 4\phi \right) d\phi = \frac{\pi}{24}$$

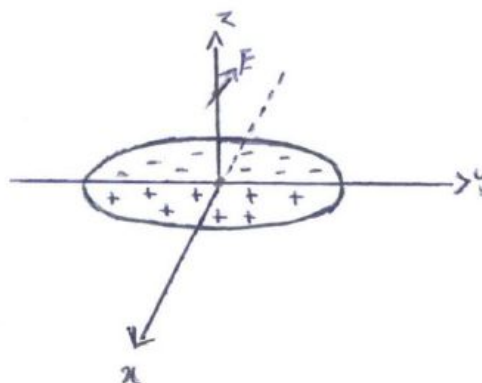
۴- گزینه «۲» صحیح است.

با توجه به اینکه تابع  $\cos \phi$  برای  $0 < X$ ، مثبت و برای  $X < 0$ ، منفی است و تقارن موجود می‌توان نتیجه گرفت که میدان در نقطه‌ی  $(0, 0, a)$  تنها در جهت  $(-\hat{x})$  خواهد بود. بنابراین تنها مؤلفه‌ی  $X$  را در انتگرال حساب می‌کنیم:

$$\vec{E} = \int \frac{dQ \vec{R}}{4\pi\epsilon_0 |\vec{R}|^3}$$

$$\vec{E} = \int \frac{(P_s dS)(-r\vec{a}_x + a\vec{a}_z)}{4\pi\epsilon_0 (r^2 + a^2)^{3/2}}$$

$$\vec{a}_x = \cos \phi \hat{x} + \sin \phi \hat{y} \Rightarrow \vec{E} = \int \frac{(r \cos \phi)(r dr d\phi)(-r \cos \phi \hat{x})}{4\pi\epsilon_0 (r^2 + a^2)^{3/2}}$$

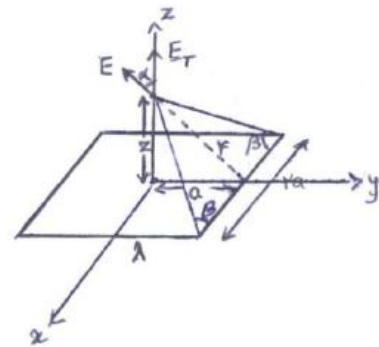


$$\vec{E} = \frac{-1}{4\pi\epsilon_0} \left( \int_0^a \frac{r^2 dr}{(r^2 + a^2)^{3/2}} \right) \underbrace{\left( \int_0^{2\pi} \cos^2 \phi d\phi \right)}_{\frac{\pi}{2}} \hat{x} = \frac{-1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{3\sqrt{2}}{2} - 2 \right) a \left( \frac{\pi}{2} \right) \hat{x} = \left[ \frac{3\sqrt{2} - 4}{16\epsilon_0} \right] a (-\hat{x})$$

$$\int_0^a \frac{r^2 dr}{(r^2 + a^2)^{3/2}} = \int_a^{\sqrt{2}a} \frac{(u^2 - a^2) u du}{u^3} = \int \left( 1 - \frac{a^2}{u} \right) du = u + \frac{a^2}{u} \Big|_a^{\sqrt{2}a} = \left( \frac{3\sqrt{2}}{2} - 2 \right) a$$

$$r^2 + a^2 = u^2 \rightarrow \begin{cases} r dr = u du \\ u^2 - a^2 = r^2 \\ a \leq u \leq a\sqrt{2} \end{cases}$$

۵- گزینه «۱» صحیح است.



$$E_T = \epsilon |E| \cos \alpha = \epsilon \left[ \frac{\lambda}{\gamma \pi \epsilon_0 r} \cos \beta \right] \cos \alpha$$

$$= \frac{\gamma \lambda}{\pi \epsilon_0 r} \times \frac{a}{\sqrt{r^2 + a^2}} \times \frac{z}{r}$$

$$= \frac{\gamma \lambda a}{\pi \epsilon_0} \frac{z}{r^2 \sqrt{r^2 + a^2}}$$

$$= \frac{\gamma \lambda a}{\pi \epsilon_0} \frac{z}{(z^2 + r^2) \sqrt{z^2 + a^2}}$$

$$E(z=a) = \frac{\gamma \lambda a}{\pi \epsilon_0} \frac{a}{\gamma a^2 \sqrt{\gamma a^2}} = \frac{\lambda}{\sqrt{\gamma} \pi \epsilon_0 a}$$

۶- گزینه «۴» صحیح است.

$$\left. \begin{aligned} f &= \gamma \pi \sqrt{\frac{F_T}{m r}} \\ F_T &= \gamma \frac{\lambda Q_0}{\gamma \pi \epsilon_0 a} = \frac{\lambda Q_0}{\pi \epsilon_0 a} \\ r &= a \end{aligned} \right\} \Rightarrow f = \gamma \pi \sqrt{\frac{\lambda Q_0}{m \pi \epsilon_0 a^2}} = \frac{\gamma \pi}{a} \sqrt{\frac{\lambda Q_0}{m \pi \epsilon_0}}$$

۷- گزینه «۴» صحیح است.

$$I = \epsilon \pi \left( \frac{r^2}{r^2 + \epsilon} \right) \Big|_{r=0} = \pi$$

۸- گزینه «۱» صحیح است.

$$\rho = \epsilon_0 (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) = \epsilon_0 \left( \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 E_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta E_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial E_\phi}{\partial \phi} \right)$$

$$E_r = \frac{1}{r}, \quad E_\theta = 0, \quad E_\phi = \frac{\sin \theta \cos \phi}{r}$$

$$\rho = \epsilon_0 \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r) + 0 + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \left( \frac{\sin \theta \cos \phi}{r} \right) \right]$$

$$= \epsilon_0 \left[ \frac{1}{r^2} - \frac{\sin \varphi}{r^2} \right] = \frac{\epsilon_0 (1 - \sin \varphi)}{r^2}$$

$$\rho = \frac{\epsilon_0 (1 - \sin(\frac{\pi}{2}))}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 4\epsilon_0 \left(1 - \frac{1}{2}\right) = 2\epsilon_0$$

۹- گزینه «۳» صحیح است.

$$(z > 0) : \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow \frac{dE_z}{dz} = \frac{1}{\epsilon_0} \left(1 - \frac{z}{h}\right) \Rightarrow E = \frac{1}{\epsilon_0} \left(z - \frac{z^2}{2h}\right) + C_1$$

$$E(z=0)=0 \Rightarrow 0=0+C_1 \Rightarrow C_1=0 \Rightarrow E_{in} = \frac{1}{\epsilon_0} \left(z - \frac{z^2}{2h}\right)$$

$$E_{in}\left(\frac{h}{2}\right) = \frac{1}{\epsilon_0} \left(\frac{h}{2} - \frac{h^2}{4h}\right) = \frac{1}{\epsilon_0} \times \frac{2h}{4}$$

$$(z > h) : \nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \Rightarrow \frac{dE_z}{dz} = 0 \Rightarrow E_{out} = C_2$$

$$E_{out}(z=h) = E_{in}(z=h) \Rightarrow C_2 = \frac{1}{\epsilon_0} \left(h - \frac{h^2}{2h}\right) = \frac{1}{\epsilon_0} \times \frac{h}{2}$$

$$\frac{E_{in}\left(\frac{h}{2}\right)}{E_{out}(2h)} = \frac{\frac{1}{\epsilon_0} \times \frac{2h}{4}}{\frac{1}{\epsilon_0} \times \frac{h}{2}} = \frac{2}{4}$$

۱۰- گزینه «۱» صحیح است.

$$E = \frac{\rho_\ell}{\epsilon_0} \frac{az}{(z^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{dE}{dz} = 0 \Rightarrow \frac{\rho_\ell a}{\epsilon_0} \left[ \frac{(z^2 + a^2)^{\frac{3}{2}} - z(2z) \left(\frac{3}{2}\right) (z^2 + a^2)^{\frac{1}{2}}}{(z^2 + a^2)^3} \right] = 0$$

$$z^2 + a^2 - 3z^2 = 0 \Rightarrow z^2 = \frac{a^2}{2} \Rightarrow z = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

$$E_{\max} = \frac{\rho_\ell}{\epsilon_0} \frac{a \times \frac{a}{\sqrt{2}}}{\left(\frac{a^2}{2} + a^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\rho_\ell}{\epsilon_0 a} \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\rho_\ell}{\epsilon_0 a} \times \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{3\sqrt{3}}{2}} = \frac{\rho_\ell}{3\sqrt{3}\epsilon_0 a}$$

۱۱- گزینه «۱» صحیح است.

$$\vec{E} = \int \frac{dQ \vec{R}}{\epsilon_0 \pi |\vec{R}|^3}$$

$$dQ = \rho_s dS_R = \rho_s a^2 \sin \theta d\theta d\phi$$

$$\vec{R} = -a \vec{a}_R + z \vec{a}_z = -a(\cos \theta \vec{a}_z + \sin \theta \vec{a}_r) + z \vec{a}_z = (z - a \cos \theta) \vec{a}_z - a \sin \theta \vec{a}_r$$

$$|\vec{R}|^2 = (z^2 + a^2 - 2az \cos \theta)^{\frac{1}{2}}, \quad z = \frac{a}{2}$$

$$\vec{E}_r = \int \frac{\rho_s a^2 \sin \theta d\theta d\phi (za - a \cos \theta)}{\epsilon_0 \pi (za^2 + a^2 - 2za \cos \theta)^{\frac{3}{2}}}$$

$$E_z = \frac{\rho_s}{\epsilon_0} \int \frac{\sin \theta (z - a \cos \theta) d\theta}{(\Delta - 2a \cos \theta)^{\frac{3}{2}}} \quad \Delta - 2a \cos \theta = u \Rightarrow \begin{cases} 2a \cos \theta d\theta = -du \\ 1 < u < \Delta \end{cases}$$

$$= \frac{\rho_s}{\epsilon_0} \int_1^\Delta \frac{\left(\frac{1}{2} du\right) \left(z - \left(\frac{\Delta - u}{2}\right)\right)}{u^{\frac{3}{2}}} = \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} \int_1^\Delta \frac{(z + u)}{u^{\frac{3}{2}}} du = \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} [2\ln u + u^{-\frac{1}{2}}]_1^\Delta$$

$$= \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} (2\ln \Delta + \frac{1}{\sqrt{\Delta}} - 2 - \frac{1}{\sqrt{1}})$$

۱۲- گزینه «۲» صحیح است.

$$\int_A^B (\nabla T) \cdot d\vec{\ell} = T(B) - T(A) = 2 \times 1 - 0 = 2$$

