

## الکترومغناطیس

۱ - بار سطحی با چگالی  $\rho_s = \cos \theta$  بر روی کره‌ای به شعاع  $a$  توزیع شده است. اندازه‌ی شدت میدان الکتریکی  $(|\vec{E}|)$  در

نقطه‌ی  $\left(R = 2a, \theta = \frac{\pi}{3}, \varphi = \frac{\pi}{2}\right)$  کدام است؟

$$\frac{\sqrt{7}}{96\epsilon_0} \quad (4)$$

$$\frac{\sqrt{7}}{48\epsilon_0} \quad (3)$$

$$\frac{\sqrt{7}}{24\epsilon_0} \quad (2)$$

$$\frac{\sqrt{7}}{12\epsilon_0} \quad (1)$$

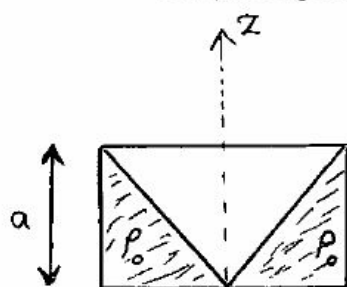
۲ - در ناحیه‌ی استوانه‌ای  $0 \leq z \leq a$ ،  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ،  $0 \leq r \leq a$  بار الکتریکی با چگالی حجمی یکنواخت  $\rho_0$  توزیع شده است. اگر مطابق شکل زیر حفره‌ای مخروطی شکل ایجاد کنیم. شدت میدان الکتریکی در رأس مخروط کدام است؟

$$\frac{-\rho_0 a}{2\epsilon_0} (2 + \sqrt{2}) \hat{z} \quad (2)$$

$$\frac{-\rho_0 a}{2\epsilon_0} (2 - \sqrt{2}) \hat{z} \quad (1)$$

$$\frac{-\rho_0 a}{4\epsilon_0} (2 - \sqrt{2}) \hat{z} \quad (4)$$

$$\frac{-\rho_0 a}{4\epsilon_0} (2 + \sqrt{2}) \hat{z} \quad (3)$$



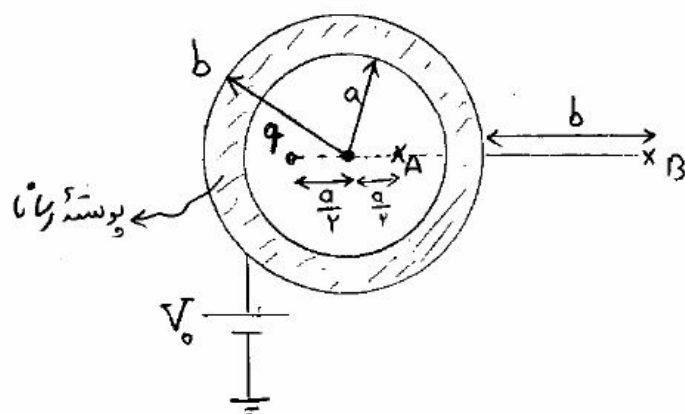
۳ - در شکل زیر کره‌ی رسانا به منبع ولتاژ  $V_0$  متصل است. اندازه‌ی شدت میدان الکتریکی در نقاط A و B کدام است؟

$$E_A = \frac{17q}{100\pi\epsilon_0 a^2}, E_B = \frac{V_0}{4b} \quad (1)$$

$$E_A = \frac{17q}{100\pi\epsilon_0 a^2}, E_B = \frac{V_0}{2b} \quad (2)$$

$$E_A = \frac{33q}{100\pi\epsilon_0 a^2}, E_B = \frac{V_0}{4b} \quad (3)$$

$$E_A = \frac{33q}{100\pi\epsilon_0 a^2}, E_B = \frac{V_0}{2b} \quad (4)$$



۴ - بی‌نهایت سیم طویل موازی در صفحه‌ی  $xy$  و نقاط  $y = k$ ،  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  قرار گرفته‌اند اگر جریان سیم‌ها در جهت

$\hat{x}$  برابر با  $I_0 (-1)^n$  باشد. شدت میدان مغناطیسی در  $(0, 0, 1)$  کدام است؟

$$\left[ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + 1} \approx -0.4 \right]$$

$$\frac{\mu_0 I_0}{10\pi} (-\hat{y}) \quad (2)$$

$$\frac{3\mu_0 I_0}{10\pi} (-\hat{y}) \quad (1)$$

$$\frac{\mu_0 I_0}{10\pi} (-\hat{y}) \quad (4)$$

$$\frac{3\mu_0 I_0}{5\pi} (-\hat{y}) \quad (3)$$

۵ - درون کره‌ای به شعاع  $a$  بار حجمی با چگالی  $\rho = \rho_0 R^2$  توزیع شده است. پتانسیل الکتریکی در شعاع  $R = \frac{a}{2}$  کدام است؟

$$(1) \frac{191\rho_0 a^5}{960 \epsilon_0} \quad (2) \frac{191\rho_0 a^5}{480 \epsilon_0}$$

$$(3) \frac{127\rho_0 a^5}{960 \epsilon_0} \quad (4) \frac{127\rho_0 a^5}{480 \epsilon_0}$$

۶ - صفحه‌ی  $z = 0$  مرز دو ماده‌ی مغناطیسی با مشخصات  $\mu_r = 3$  برای  $z > 0$ ،  $\mu_r = 2$  برای  $z < 0$  می‌باشد که جریان

سطحی  $\vec{J}_s = -\vec{a}_x - \vec{a}_y$  نیز در این صفحه برقرار است. اگر در ناحیه‌ی  $z < 0$  داشته باشیم  $\vec{B} = 2\vec{a}_x - 2\vec{a}_y + 2\vec{a}_z$ ، در  $\mu_0$

این صورت  $|\vec{M}|$  در ناحیه  $z > 0$  کدام است؟

$$(1) 2\sqrt{10} \quad (2) 2\sqrt{2} \quad (3) 2\sqrt{6} \quad (4) \sqrt{2}$$

۷ - در فضای آزاد بر روی کره‌ای به شعاع  $a$  و مرکز مبدأ مختصات جریان سطحی  $\vec{k} = k_0 \sin \theta \hat{a}_\phi$  برقرار است. اگر فضای داخل

کره ماده‌ای مغناطیسی با ضریب گذردهی نسبی  $\mu_r = 4$  پر شده باشد. شدت میدان مغناطیسی ( $H$ ) در نقطه‌ی

$\left( R = 2a, \theta = \frac{\pi}{2}, \phi = \frac{\pi}{2} \right)$  کدام است؟

$$(1) \frac{-1}{6} \hat{z} \quad (2) \frac{-1}{12} \hat{z} \quad (3) \frac{-1}{4} \hat{z} \quad (4) \frac{-1}{3} \hat{z}$$

۸ - دو حلقه‌ی دایروی با جریان‌های هم جهت  $I$  و شعاع یکسان  $a$  به صورت هم صفحه در مجاورت یکدیگر در فاصله‌ی  $r$

$(r \gg a)$  قرار گرفته‌اند کار لازم جهت نصف نمودن فاصله‌ی دو حلقه کدام است؟

$$(1) -\frac{7\pi\mu_0 a^4 I^2}{4r^3} \quad (2) -\frac{5\pi\mu_0 a^4 I^2}{4r^3}$$

$$(3) -\frac{15\pi\mu_0 a^4 I^2}{4r^3} \quad (4) -\frac{3\mu_0 a^4 I^2}{4\pi r^3}$$

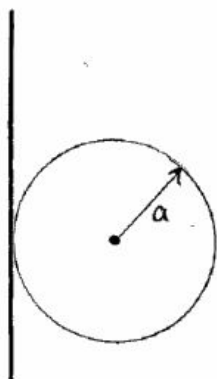
۹ - صفحه‌ی رسانای  $x=d$  به ولتاژ صفر ولت و صفحه‌ی رسانای  $x=3d$  را به ولتاژ  $V_0$  متصل می‌کنیم در صورتی که فضای بین

دو صفحه از ماده با رسانایی  $\sigma = \frac{\sigma_0}{x^2}$  پر شده باشد. بردار چگالی جریان در این ناحیه کدام است؟

$$(1) \frac{\sigma_0 V_0}{26 d^3} (-\hat{x}) \quad (2) \frac{3\sigma_0 V_0}{26 d^3} (-\hat{x})$$

$$(3) \frac{\sigma_0 V_0}{d^3} (-\hat{x}) \quad (4) \frac{\sigma_0 V_0}{d^3} (-\hat{x})$$

۱۰ - دو سیم هادی یکی مستقیم و بسیار طویل و دیگری به صورت دایره‌ای به شعاع  $a$  در مجاورت یکدیگر قرار گرفته‌اند اما تماس الکتریکی با هم ندارند، ضریب القاء متقابل بین این دو سیم کدام است؟



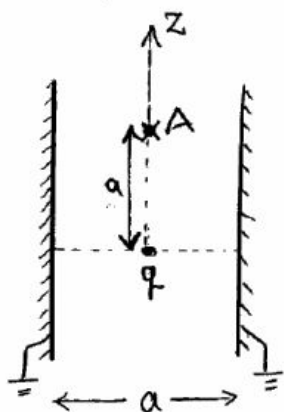
(۱)  $\mu_0 a$

(۲)  $2 \mu_0 a$

(۳)  $\frac{1}{2} \mu_0 a$

(۴)  $\frac{1}{4} \mu_0 a$

۱۱ - بار الکتریکی  $q$  در وسط دو صفحه‌ی رسانای نامحدود زمین شده قرار دارد. مطلوبست شدت میدان الکتریکی در نقطه‌ی A:



$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n^2 + 1)^{3/2}} \approx -0.7$$

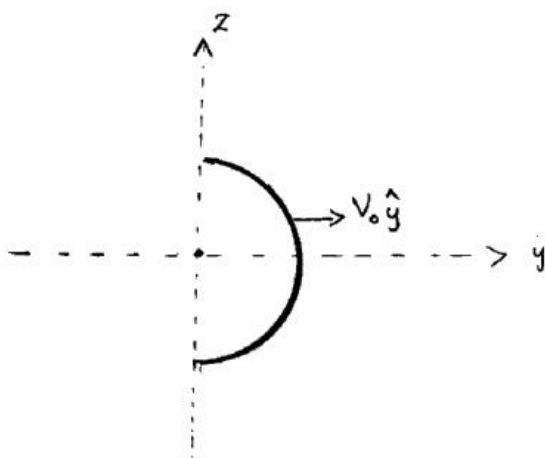
(۱)  $\frac{q}{12 \pi \epsilon_0 a^2}$

(۲)  $\frac{q}{10 \pi \epsilon_0 a^2}$

(۳)  $\frac{q}{8 \pi \epsilon_0 a^2}$

(۴)  $\frac{q}{4 \pi \epsilon_0 a^2}$

۱۲ - یک سیم هادی به صورت نیم‌دایره‌ای به شعاع  $a$  با سرعت ثابت  $V_0 \hat{y}$  مطابق شکل زیر در میدان مغناطیسی  $B_0 \hat{x}$  حرکت می‌کند. ولتاژ القایی بین دو انتهای هادی کدام است؟



(۱)  $\pi a V_0 B_0$

(۲)  $2 a V_0 B_0$

(۳)  $2 \pi a V_0 B_0$

(۴)  $\frac{1}{2} a V_0 B_0$

۱- گزینه «۳» صحیح است.

$$\vec{P} = \lambda \times \left( \frac{\pi}{r} a^r \right) \vec{a}_z$$

$$E = \frac{|P|}{4\pi\epsilon_0 R^r} [r \cos \theta \vec{a}_R + \sin \theta \vec{a}_\theta]$$

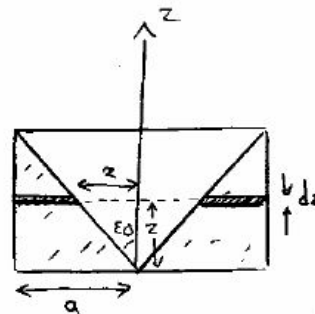
$$\frac{|P|}{4\pi\epsilon_0 R^r} = \frac{a^r}{r\epsilon_0 (\lambda a^r)} = \frac{\lambda}{r\epsilon_0}$$

$$r \cos \theta \vec{a}_R = r \cos(\phi) [\cos \phi \cdot \vec{a}_z + \sin \phi \cdot \vec{a}_r]_{\phi=\phi} = \frac{1}{r} \vec{a}_z + \frac{\sqrt{r}}{r} \vec{a}_y$$

$$\sin \theta \vec{a}_\theta = \sin \phi [-\sin \phi \cdot \vec{a}_z + \cos \phi \cdot \vec{a}_r]_{\phi=\phi} = \frac{\sqrt{r}}{r} \left[ -\frac{\sqrt{r}}{r} \vec{a}_z + \frac{1}{r} \vec{a}_y \right] = -\frac{r}{4} \vec{a}_z + \frac{\sqrt{r}}{r} \vec{a}_y$$

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{r\epsilon_0} \left[ -\frac{1}{4} \vec{a}_z + \frac{r\sqrt{r}}{4} \vec{a}_y \right]$$

$$|\vec{E}| = \frac{\lambda}{r\epsilon_0} \times \frac{1}{4} \times \sqrt{1+r^2} = \frac{\sqrt{r}}{4\lambda\epsilon_0}$$



۲- گزینه «۴» صحیح است.

$$E_1 = \int \frac{\rho_\ell}{r\epsilon_0} \frac{rZ}{(r^r + Z^r)^{\frac{r}{r}}} dz$$

$$E_1 = \int \frac{\rho_s dr}{r\epsilon_0} \frac{rZ}{(r^r + Z^r)^{\frac{r}{r}}} = \frac{\rho_s Z}{r\epsilon_0} \frac{-1}{\sqrt{r^r + Z^r}} \Bigg|_z^a = \frac{\rho_s Z}{r\epsilon_0} \left[ \frac{1}{Z\sqrt{r}} - \frac{1}{\sqrt{a^r + Z^r}} \right]$$

$$E_1 = \frac{\rho_s}{r\epsilon_0} \left( \frac{1}{\sqrt{r}} - \frac{Z}{\sqrt{Z^r + a^r}} \right) = \frac{\rho_s dz}{r\epsilon_0} \left( \frac{\sqrt{r}}{r} - \frac{Z}{\sqrt{Z^r + a^r}} \right)$$

$$E_r = \int E_1 = \int_0^a \frac{\rho_0}{r\epsilon_0} \left( \frac{\sqrt{r}}{r} - \frac{Z}{\sqrt{Z^r + a^r}} \right) dz = \frac{\rho_0}{r\epsilon_0} \left[ \frac{\sqrt{r}}{r} Z - \sqrt{Z^r + a^r} \right]_0^a$$

$$= \frac{\rho_0}{r\epsilon_0} \left[ \frac{\sqrt{r}}{r} a - \sqrt{r^r + a^r} + a \right] = \frac{\rho_0 a}{r\epsilon_0} \left( 1 - \frac{\sqrt{r}}{r} \right) = \frac{\rho_0 a}{4\epsilon_0} (r - \sqrt{r})$$

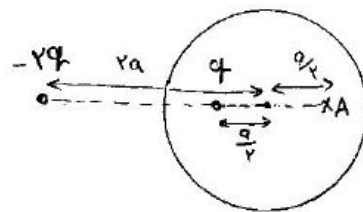
۳- گزینه «۱» صحیح است.

$$E_B = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0 (rb)^r} = \frac{4\pi\epsilon_0 b V_0}{4\pi\epsilon_0 (rb)^r} = \frac{V_0}{rb} \hat{x}$$

$$d_i = \frac{a^r}{\frac{a}{r}} = ra$$

$$q_i = -\frac{a}{\frac{a}{r}} q = -rq$$

$$E_A = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a^r} \hat{x} + \frac{rq}{4\pi\epsilon_0 \left(\frac{\Delta a}{r}\right)^r} \hat{x} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a^r} \left[1 - \frac{1}{r\Delta}\right] = \frac{17q}{10 \cdot \pi\epsilon_0 a^r} \hat{x}$$



۴- گزینه «۴» صحیح است.

هم مثل این در تکمیل کردن (-1)^n

$$B_{T_0} = \frac{\mu_0 I_0}{r\pi} (-\hat{y})$$

$$B_{T_n} = r B_{T_n} \cos \alpha = r \left[ \frac{\mu_0 (-1)^n I_0}{r\pi\sqrt{n^r+1}} \right] \frac{1}{\sqrt{n^r+1}} = \frac{\mu_0 (-1)^n I_0}{\pi(n^r+1)} (-\hat{y})$$

$$B_T = B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} B_{T_n} = \frac{\mu_0 I_0}{\pi} \left( \frac{1}{r} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^r+1} \right) (-\hat{y}) = \frac{\mu_0 I_0}{10\pi} (-\hat{y})$$

۵- گزینه «۱» صحیح است.

$$\rho = \rho_0 R^n \quad \text{چون: } V(R_0) = \frac{\rho_0}{(n+r)\epsilon_0} \left( a^{n+r} - \frac{R_0^{n+r}}{n+r} \right)$$

$$n=r \Rightarrow V\left(R_0 = \frac{a}{r}\right) = \frac{\rho_0}{\Delta\epsilon_0} \left( a^\Delta - \frac{a^\Delta}{r\Delta} \right) = \frac{191\rho_0 a^\Delta}{960\epsilon_0}$$

۶- گزینه «۲» صحیح است.



$$\mu_{r_2} = 3$$

$$\vec{B}_0 = B_0 \hat{x} - \hat{y} \quad z=0$$

$$H_r = [r\hat{x} - \hat{y}] + \hat{z} + \hat{y} - \hat{x}$$

$$H_r = \hat{x} + \hat{z} \Rightarrow |H_r| = \sqrt{2}$$

$$M_r = (\mu_{r_1} - 1) H_r = r H_r = r\sqrt{2}$$

$$\mu_{r_1} = 2$$

$$\frac{B_1}{\mu_0} = 2\hat{x} - \hat{y} + 2\hat{z}$$

$$\rightarrow H_1 = 2\hat{x} - \hat{y} + \frac{2}{\mu_0}\hat{z}$$

۷- گزینه «۲» صحیح است.

$$\vec{k}_T = \vec{k} + \vec{k}_m = \vec{k} + \frac{\gamma(\mu_r - 1)}{\mu_r + \gamma} \vec{k} = \vec{k} + \frac{\gamma \times \gamma}{\epsilon} \vec{k} = \gamma \vec{k} = \gamma k_o \sin \theta \hat{a}_\phi$$

$$\vec{m} = (\gamma k_o) \left( \frac{\gamma \pi}{\gamma} a^\gamma \right) \hat{z}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_o |\vec{m}|}{\gamma \pi R^\gamma} (\gamma \cos \theta \vec{a}_R + \sin \theta \vec{a}_\theta)$$

$$\left( \gamma a, \frac{\pi}{\gamma}, \frac{\pi}{\gamma} \right): \vec{B} = \frac{\gamma \mu_o a^\gamma}{\gamma (\gamma a)^\gamma} (-\hat{a}_z) \Rightarrow \vec{H}_{out} = \frac{\vec{B}}{\mu_o} = \frac{1}{\gamma^2} (-\hat{z})$$

۸- گزینه «۱» صحیح است.

چون نیرو جاذبه است نزدیکتر نمودن حلقه کاری است منفی.

$$F = \frac{\gamma \mu_o m_1 m_2}{\gamma \pi r^\gamma}$$

$$w = \int \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = \int_r^r \frac{\gamma \mu_o |m^\gamma|}{\gamma \pi r^\gamma} dr = \frac{\gamma \mu_o |m^\gamma|}{\gamma \pi} \left( \frac{-1}{\gamma r^\gamma} \right)_r^r$$

$$= \frac{\mu_o |m^\gamma|}{\gamma \pi} \left( \frac{1}{r^\gamma} - \frac{1}{r^\gamma} \right) = -\frac{\gamma \mu_o |m^\gamma|}{\gamma \pi r^\gamma} = -\frac{\gamma \mu_o (\pi a^\gamma I)^\gamma}{\gamma \pi r^\gamma} = -\frac{\gamma \pi \mu_o a^\gamma I^\gamma}{\gamma r^\gamma}$$

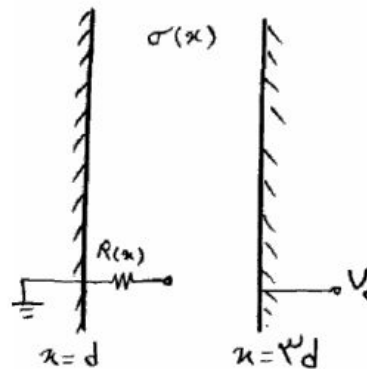
۹- گزینه «۲» صحیح است.

$$R(x) = \int_d^x \frac{dx}{\sigma A} = \frac{\sigma_o}{A} \left[ \frac{x^\gamma}{\gamma} \right]_d^x$$

$$V \propto R(x) \propto x^\gamma - d^\gamma$$

$$\frac{V(x)}{V(\gamma d)} = \frac{x^\gamma - d^\gamma}{\gamma^\gamma d^\gamma} \Rightarrow V(x) = \frac{V_o}{\gamma^\gamma d^\gamma} (x^\gamma - d^\gamma)$$

$$E = -\frac{dv}{dx} \hat{x} = \frac{\gamma V_o x^{\gamma-1}}{\gamma^\gamma d^\gamma} (-\hat{x}) \Rightarrow \vec{J} = \sigma \vec{E} = \frac{\gamma \sigma_o V_o}{\gamma^\gamma d^\gamma} (-\hat{x})$$



۱۰- گزینه «۱» صحیح است.

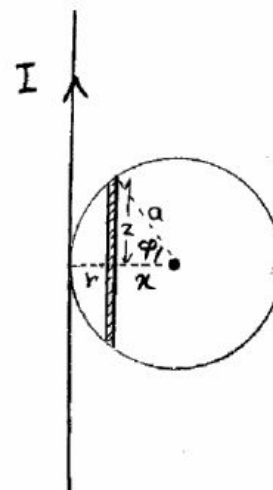
$$d\phi_m = B dS = \frac{\mu_o I}{\gamma \pi r} (\gamma z dr)$$

$$x = a \cos \phi$$

$$z = a \sin \phi$$

$$r = a - x = a(1 - \cos \phi) = \gamma a \sin \left( \frac{\phi}{\gamma} \right)$$

$$dr = a \sin \phi d\phi$$

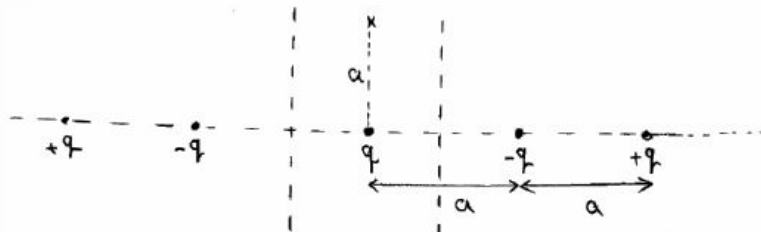


$$d\phi_m = \frac{\mu_o I a \sin(\varphi) a \sin \varphi d\varphi}{\pi r a \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)}$$

$$\phi_{1r} = \int d\phi_m = \int \frac{r\mu_o I a}{\pi} \cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) d\varphi = \int_0^\pi \frac{\mu_o I a}{\pi} (1 + \cos \varphi) d\varphi$$

$$L_{1r} = \frac{\phi_{1r}}{I} = \mu_o a$$

۱۱- گزینه «۲» صحیح است.



$$E_o = \frac{q}{r^2 \pi \epsilon_o a^2} \hat{a}_z$$

$$E_{T_n} = r \left[ \frac{(-1)^n q}{r^2 \pi \epsilon_o (n^2 a^2 + a^2)} \right] \cos \alpha \vec{a}_z = \frac{q}{r^2 \pi \epsilon_o a^2} \times \frac{r (-1)^n}{(n^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} \vec{a}_z$$

$$E_T = E_o + \sum_{n=1}^{\infty} E_{T_n} = \frac{q}{r^2 \pi \epsilon_o a^2} \left[ 1 + r \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} \right] \hat{a}_z = \frac{q}{1 \cdot \pi \epsilon_o a^2} \vec{a}_z$$

۱۲- گزینه «۲» صحیح است.

$$emf = |B| |V| \ell_e = B V_o (ra)$$