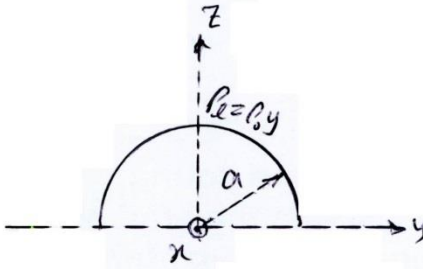


## الکترومغناطیس

۱- روی محیط نیم‌دایره‌ای به شعاع  $a$  و مرکز مبدا مختصات واقع در نیم‌صفحه‌ی  $\begin{cases} x=0 \\ z>0 \end{cases}$  بار خطی با چگالی  $\rho_\ell = \rho_0 y$  توزیع شده است. میدان الکتریکی در مبدا مختصات کدام گزینه است؟



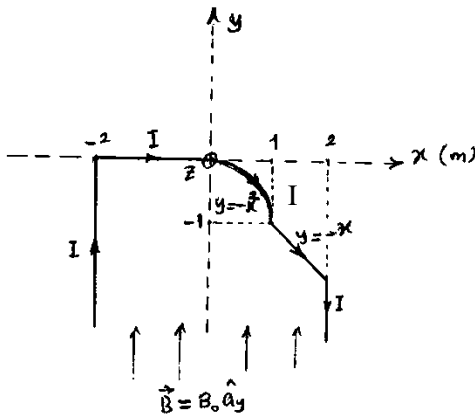
$$\vec{E} = \frac{\rho_0}{8\epsilon_0} (-\hat{a}_y) \quad (1)$$

$$\vec{E} = \frac{\rho_0}{8\epsilon_0} (-\hat{a}_z) \quad (2)$$

$$\vec{E} = \frac{\rho_0}{4\epsilon_0} (-\hat{a}_y) \quad (3)$$

$$\vec{E} = \frac{\rho_0}{4\epsilon_0} (-\hat{a}_z) \quad (4)$$

۲- میدان مغناطیسی یکنواخت  $\vec{B} = B_0 \hat{a}_y$  در محیط برقرار است. جریان  $I$  روی مسیر نشان داده شده در شکل جریان دارد نیروی مغناطیسی وارد بر سیم حامل جریان توسط میدان مغناطیسی چقدر است؟



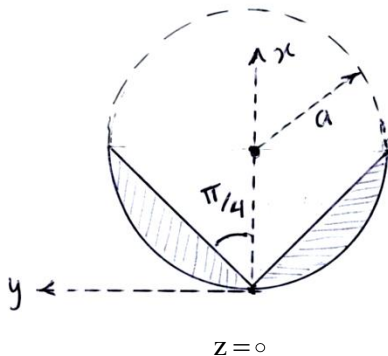
$$\vec{F}_m = 4IB_0 \hat{a}_z \quad (1)$$

$$\vec{F}_m = 2IB_0 \hat{a}_z \quad (2)$$

$$\vec{F}_m = \sqrt{2}IB_0 \hat{a}_z \quad (3)$$

$$\vec{F}_m = 0 \quad (4)$$

۳- سطح هاشورخورده واقع در صفحه  $z=0$  مطابق شکل زیر دارای بار سطحی با چگالی  $\rho_s = \rho_0 \cos\phi$  می‌باشد. پتانسیل الکتریکی در مبدا مختصات کدام گزینه است؟



$$V = \frac{\rho_0}{2\pi\epsilon_0} \left( \frac{\pi}{4} - 1 \right) \quad (1)$$

$$V = \frac{\rho_0}{2\pi\epsilon_0} \left( \frac{\pi}{2} - 1 \right) \quad (2)$$

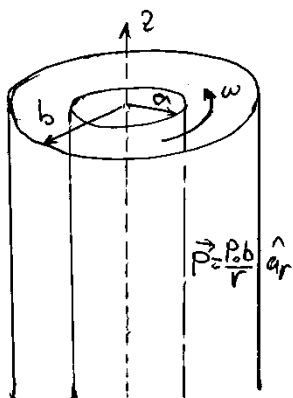
$$V = \frac{\rho_0}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{\pi}{4} - 1 \right) \quad (3)$$

$$V = \frac{\rho_0}{2\pi\epsilon_0} \left( \frac{\pi}{2} - 1 \right) \quad (4)$$

۴ - عایقی به شکل پوسته استوانه‌ای طویل به شعاع داخلی  $a$  و خارجی  $b$  پلاریزه شده است و بردار قطبی‌شدگی واحد حجم آن  $\vec{P} = \frac{P_0 b}{r} \hat{a}_r$

می‌باشد. این پوسته را حول محور  $z$  با سرعت زاویه‌ای  $\omega$  می‌چرخانیم بردار پتانسیل مغناطیسی  $(\vec{A})$  در ناحیه

$a < r < b$  چقدر است؟



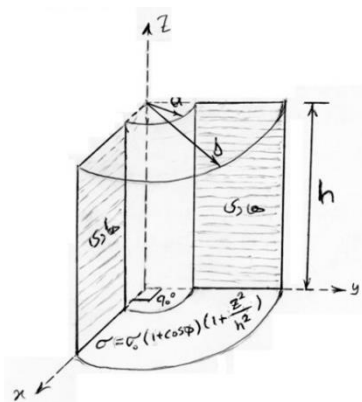
$$\vec{A} = \frac{P_0 b \omega (r^2 - a^2)}{2r} \hat{a}_\phi \quad (1)$$

$$\vec{A} = \frac{P_0 a \omega (2b^2 - r^2)}{2r} \hat{a}_\phi \quad (2)$$

$$\vec{A} = \frac{P_0 b \omega (r^2 - a^2)}{2r} \hat{a}_\phi \quad (3)$$

$$\vec{A} = \frac{P_0 a \omega (b^2 - r^2)}{2r} \hat{a}_\phi \quad (4)$$

۵ - با فرض  $a, h \gg b$  مقاومت الکتریکی بین صفحات هادی خازن زیر را به دست آورید؟ (راهنمایی:  $\frac{\phi}{2} \cos^2 \phi = 1 + \cos \phi$ )



$$R = \frac{4}{2\sigma_0 h \ln \frac{b}{a}} \quad (1)$$

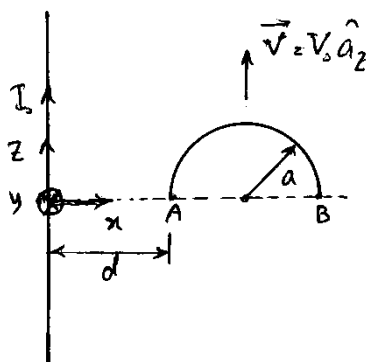
$$R = \frac{2\sqrt{2}}{2\sigma_0 h \ln \frac{b}{a}} \quad (2)$$

$$R = \frac{2\sqrt{3}}{2\sigma_0 h \ln \frac{b}{a}} \quad (3)$$

$$R = \frac{2}{2\sigma_0 h \ln \frac{b}{a}} \quad (4)$$

۶ - جریان خطی  $I_0$  روی محور  $z$  در جهت  $\hat{a}_z$  برقرار است میله‌ای به شکل نیم‌دایره و شعاع  $a$  با سرعت  $\vec{V} = V_0 \hat{a}_z$  به موازات محور  $z$

ها و به فاصله‌ی  $d$  از آن مطابق شکل حرکت می‌کند نیروی محرکه‌ی القایی دو سر میله  $(V_A - V_B)$  برابر کدام گزینه است؟



$$V_A - V_B = -\frac{\mu_0 V_0 I_0}{2\pi} \ln \left( 1 + \frac{a}{d} \right) \quad (1)$$

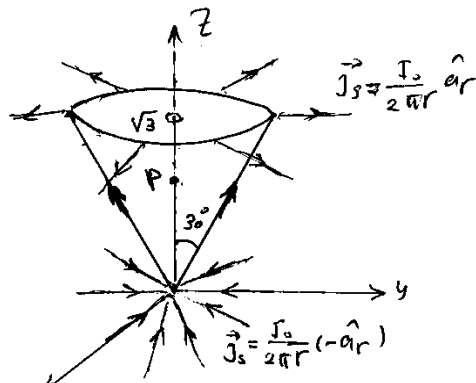
$$V_A - V_B = -\frac{\mu_0 V_0 I_0}{2\pi} \ln \left( 1 + \frac{2a}{d} \right) \quad (2)$$

$$V_A - V_B = -\frac{\mu_0 V_0 I_0}{2\pi} \ln \frac{a}{d} \quad (3)$$

$$V_A - V_B = -\frac{\mu_0 V_0 I_0}{2\pi} \ln \frac{2a}{d} \quad (4)$$

۷ - جریان سطحی به مقدار  $I_0$  با چگالی  $\vec{J}_s = \frac{I_0}{2\pi r}(-\hat{a}_r)$  در سطح  $z=0$  برقرار است این جریان پس از عبور از سطح جانبی مخروط مطابق شکل در

سطح  $z=\sqrt{3}$  با چگالی  $\vec{J}_s = \frac{I_0}{2\pi r}\hat{a}_r$  پخش می شود. بردار پتانسیل مغناطیسی  $\vec{A}$  در نقطه  $P(0,0,\frac{2}{\sqrt{3}})$  چقدر است؟



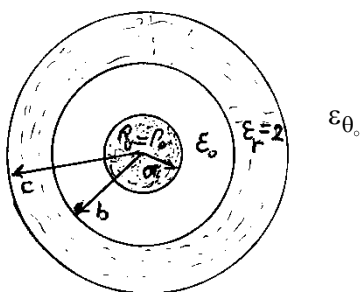
$$\vec{A} = \frac{\mu_0 I_0}{4\pi} \ln(r + \sqrt{3}) \hat{a}_z \quad (1)$$

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 I_0}{4\pi} \ln(r + \sqrt{3}) \hat{a}_z \quad (2)$$

$$\vec{A} = \frac{\sqrt{3}\mu_0 I_0}{4\pi} \ln(r + \sqrt{3}) \hat{a}_z \quad (3)$$

$$\vec{A} = \frac{\sqrt{3}\mu_0 I_0}{4\pi} \ln(r + \sqrt{3}) \hat{a}_z \quad (4)$$

۸ - در فضای آزاد کره‌ای به شعاع  $a$  و هم‌مرکز با مبداء مختصات با بار حجمی به چگالی یکنواخت  $\rho_0$  پر شده است. اگر فقط ناحیه  $b < R < c$  را مطابق شکل با ماده عایقی با  $\epsilon_r = 2$  پر کنیم تغییر انرژی سیستم برابر کدام گزینه است؟



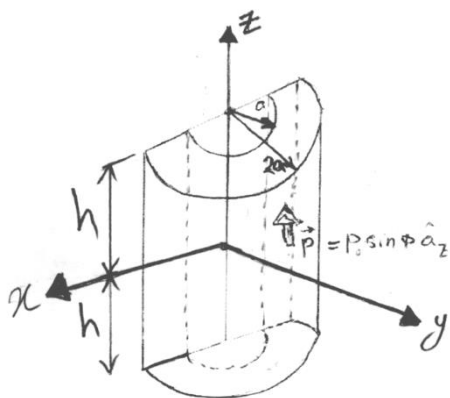
$$\frac{4\pi\rho_0 a^3}{9\epsilon_0} \left( \frac{1}{b} - \frac{1}{c} \right) \quad (1)$$

$$\frac{-2\pi\rho_0 a^3}{9\epsilon_0} \left( \frac{1}{b} - \frac{1}{c} \right) \quad (2)$$

$$\frac{-\pi\rho_0 a^3}{9\epsilon_0} \left( \frac{1}{b} - \frac{1}{c} \right) \quad (3)$$

$$\frac{-\pi\rho_0 a^3}{18\epsilon_0} \left( \frac{1}{b} - \frac{1}{c} \right) \quad (4)$$

۹ - پوسته‌ای نیم استوانه با مشخصات  $a \leq r \leq 2a$  و  $0 \leq \phi \leq \pi$  از ماده پلاریزه شده‌ای با بردار پلاریزاسیون در واحد حجم  $\vec{P} = P_0 \sin \phi \hat{a}_z$  تشکیل شده است و بقیه نواحی فضای آزاد می باشد. میدان الکتریکی در مبداء مختصات چقدر است؟



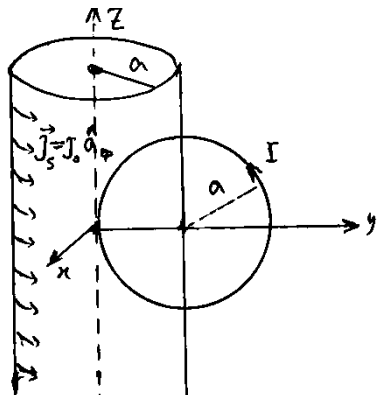
$$\vec{E} = \frac{P_0}{\pi\epsilon_0} \left[ \frac{2a}{\sqrt{a^2 + h^2}} - \frac{a}{\sqrt{4a^2 + h^2}} \right] (-\hat{a}_z) \quad (1)$$

$$\vec{E} = \frac{P_0}{2\pi\epsilon_0} \left[ \frac{2a}{\sqrt{a^2 + h^2}} - \frac{a}{\sqrt{4a^2 + h^2}} \right] (-\hat{a}_z) \quad (2)$$

$$\vec{E} = \frac{P_0}{\pi\epsilon_0} \left[ \frac{h}{\sqrt{a^2 + h^2}} - \frac{h}{\sqrt{4a^2 + h^2}} \right] (-\hat{a}_z) \quad (3)$$

$$\vec{E} = \frac{P_0}{2\pi\epsilon_0} \left[ \frac{h}{\sqrt{a^2 + h^2}} - \frac{h}{\sqrt{4a^2 + h^2}} \right] (-\hat{a}_z) \quad (4)$$

۱۰- در فضای آزاد جریان سطحی با چگالی  $\vec{J}_s = J_0 \hat{\phi}$  روی سطح استوانه‌ای طویل به شعاع  $a$  برقرار است و در محیط حلقه‌ای دایره‌ای به شعاع  $a$  و مرکز  $(0, a, 0)$  واقع در صفحه‌ی  $x=0$  مطابق شکل جریان  $I$  در جهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت جریان دارد. گشتاور وارد بر حلقه‌ی دایره‌ای کدام گزینه می‌باشد؟



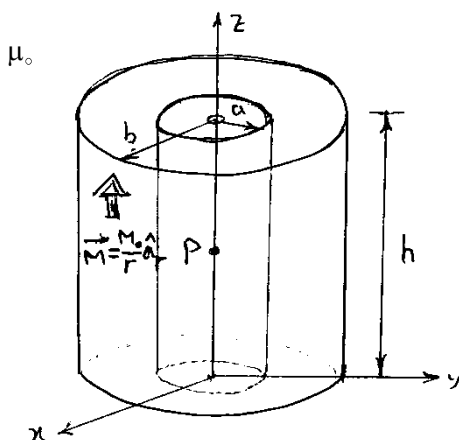
$$\mu_0 \pi a^2 J_0 \hat{y} \quad (1)$$

$$\mu_0 \pi a^2 J_0 (-\hat{y}) \quad (2)$$

$$\frac{\mu_0 \pi a^2 J_0}{2} \hat{y} \quad (3)$$

$$\frac{\mu_0 \pi a^2 J_0}{2} (-\hat{y}) \quad (4)$$

۱۱- چگالی شار مغناطیسی ( $\vec{B}$ ) در نقطه‌ی  $P(0, 0, \frac{h}{2})$  ناشی از جسم مغناطیسی شده شکل زیر کدام گزینه است؟



$$\begin{cases} \vec{M} = \frac{m_0}{r} \hat{a}_r & a \leq r \leq b, 0 \leq z \leq h \\ \text{و بقیه نواحی فضای آزاد} \end{cases}$$

$$\vec{B} = \mu_0 M_0 \left[ \frac{1}{\sqrt{a^2 + h^2}} - \frac{1}{\sqrt{b^2 + h^2}} \right] \hat{a}_z \quad (1)$$

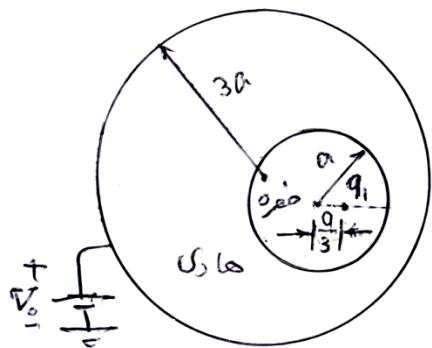
$$\vec{B} = \frac{\mu_0 M_0}{2} \left[ \frac{1}{\sqrt{a^2 + h^2}} - \frac{1}{\sqrt{b^2 + h^2}} \right] \hat{a}_z \quad (2)$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 M_0}{4} \left[ \frac{1}{\sqrt{a^2 + h^2}} - \frac{1}{\sqrt{b^2 + h^2}} \right] \hat{a}_z \quad (3)$$

(4) صفر

۱۲- حفره‌ی کروی به شعاع  $a$  در درون هادی کروی به شعاع  $3a$  و با پتانسیل ثابت  $V_0$  مطابق شکل ایجاد شده است و بار نقطه‌ای  $q_1$  را به فاصله  $\frac{a}{3}$  از مرکز حفره قرار داده‌ایم. اگر بار نقطه‌ای  $q_1$  را به  $q_2$  تغییر داده و به فاصله‌ی  $\frac{a}{3}$  از مرکز حفره منتقل کنیم،  $q_2$  چقدر انتخاب شود تا تغییر انرژی

سیستم صفر باشد؟



$$q_2 = \sqrt{\frac{27}{32}} q_1 \quad (1)$$

$$q_2 = \sqrt{\frac{18}{49}} q_1 \quad (2)$$

$$q_2 = \frac{3}{4} q_1 \quad (3)$$

(4) نمی‌توان برای بار  $q_2$  مقداری به‌دست آورد.

۱ - گزینه ۱ صحیح است.

$$\vec{E} = \int_0^{\pi/2} \frac{\rho_0 a \sin \theta \sin \varphi}{\epsilon_0 a^2} (\vec{r} - a \hat{r}) d\theta = \frac{-\rho_0}{\epsilon_0} \hat{y} \int_0^{\pi/2} \sin^2 \theta d\theta = \frac{\rho_0}{4\epsilon_0} (-\hat{y})$$

۲ - گزینه ۱ صحیح است.

$$\vec{F}_m = \vec{I} \times \vec{B} = I \hat{x} \times B_0 \hat{y} = I B_0 \hat{z}$$

۳ - گزینه ۴ صحیح است.

$$V = \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \frac{\rho_0 \cos \phi r dr d\phi}{\epsilon_0 r} = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \cos \phi d\phi = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \left( \frac{\pi}{2} - 1 \right)$$

۴ - گزینه ۳ صحیح است.

$$\rho_{vb} = 0, \quad \rho_{sb} = \vec{P} \cdot \hat{n}_s \Rightarrow \begin{cases} \rho_{sb} = P_0 & r = b \\ \rho_{sb} = \frac{-P_0 b}{a} & r = a \end{cases}$$

$$\vec{J}_{s_r} = P_0 b \omega \hat{\phi} \quad r = b, \quad \vec{J}_{s_l} = -P_0 b \omega \hat{\phi} \quad r = a$$

$$\oint \vec{A} \cdot d\vec{\ell} = \int \vec{B} \cdot d\vec{s}$$

$$A \pi r = P_0 b \omega \pi (r^2 - a^2)$$

$$\vec{A} = \frac{P_0 b \omega (r^2 - a^2)}{2r} \hat{\phi} \quad a < r < b$$

۵ - گزینه ۱ صحیح است.

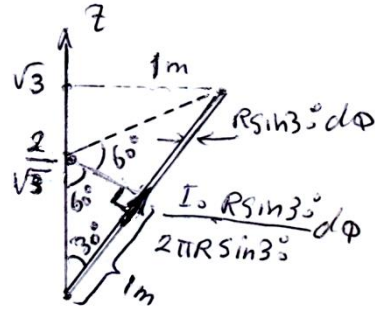
$$R = \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\int_a^b \int_0^h \frac{\sigma_0 (1 + \cos \phi) \left( 1 + \frac{z^2}{h^2} \right) dz dr}{r}} = \frac{1}{\sigma_0 \ln \frac{b}{a}} \frac{\int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} \left( 1 + \tan^2 \frac{\phi}{2} \right) d\phi}{\left[ z + \frac{z^3}{3h^2} \right]_0^h}$$

$$= \frac{\tan \frac{\phi}{2} \Big|_0^{\pi/2}}{\sigma_0 \ln \frac{b}{a} \left( \frac{1}{3} h \right)} = \frac{2}{3 \sigma_0 h \ln \frac{b}{a}}$$

۶ - گزینه ۲ صحیح است.

$$V_A - V_B = - \int_{d+a}^d \left( \vec{V}_0 \hat{z} \times \frac{\mu_0 I_0}{2\pi x} \hat{y} \right) \cdot (dx \hat{x} + dz \hat{z}) = - \frac{\mu_0 V_0 I_0}{2\pi} \ln \left( 1 + \frac{a}{d} \right)$$

۷ - گزینه ۳ صحیح است.



$$\vec{J}_s = \frac{I_0}{2\pi R \sin 30^\circ} \hat{a}_R$$

روی سطح جانبی مخروط

$$\vec{A} = \int_0^{2\pi} \frac{\frac{\mu_0 I_0 \cos 60^\circ \hat{a}_z}{2\pi R \sin 30^\circ} R \sin 30^\circ d\phi}{4\pi} \ln \left( \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}} \right) = \frac{\sqrt{3} \mu_0 I_0}{4\pi} \ln \left( \frac{2 + \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} \right) \hat{a}_z = \frac{\sqrt{3} \mu_0 I_0}{4\pi} \ln(2 + \sqrt{3}) \hat{a}_z$$

۸ - گزینه ۳ صحیح است.

فقط انرژی ناحیه  $b < R < c$  تغییر می کند.

$$\Delta W_e = W_{e_r} - W_{e_i} = \frac{4\pi}{r} \int_b^c \left[ \frac{\rho_0 \frac{4}{r} \pi a^r}{4\pi R^r} \right] R^r dR \left( \frac{1}{2\epsilon_0} - \frac{1}{\epsilon_0} \right) = -\frac{\pi \rho_0^2 a^2}{4\epsilon_0} \left( \frac{1}{b} - \frac{1}{c} \right)$$

۹ - گزینه ۳ صحیح است.

$$\rho_{sb} = \vec{P} \cdot \hat{n}_s \Rightarrow \begin{cases} \rho_{sb} = P_0 \sin \phi & z = h, a \leq r \leq 2a, 0 \leq \phi \leq \pi \\ \rho_{sb} = -P_0 \sin \phi & z = 0, a \leq r \leq 2a, 0 \leq \phi \leq \pi \end{cases}$$

$$\vec{E} = \int_a^{2a} \int_0^\pi \frac{P_0 \sin \phi' (\hat{r} - r' \hat{a}_r - h \hat{a}_z)}{4\pi \epsilon_0 (r'^2 + h^2)^{3/2}} = \frac{P_0 h}{2\pi \epsilon_0} [-\cos \phi']_0^\pi \left[ \frac{-1}{\sqrt{r'^2 + h^2}} \right]_a^{2a} (-\hat{a}_z)$$

$$= \frac{P_0}{\pi \epsilon_0} \left[ \frac{h}{\sqrt{a^2 + h^2}} - \frac{h}{\sqrt{4a^2 + h^2}} \right] (-\hat{a}_z)$$

۱۰ - گزینه ۴ صحیح است.

$$\vec{T} = \frac{\pi a^2 I}{r} \hat{a}_x \times \mu_0 J_0 \hat{a}_z = \frac{\mu_0 \pi a^2 I J_0}{r} (-\hat{a}_y)$$

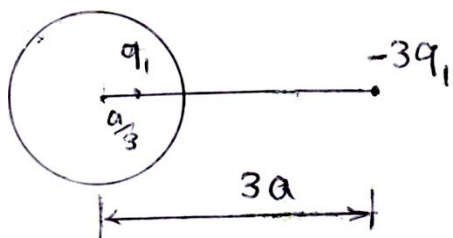
۱۱ - گزینه ۴ صحیح است.

$$\vec{J}_{sm} \Big|_{z=h} = \frac{M_0}{r} \hat{a}_r \times \hat{a}_z = \frac{M_0}{r} (-\hat{a}_\phi)$$

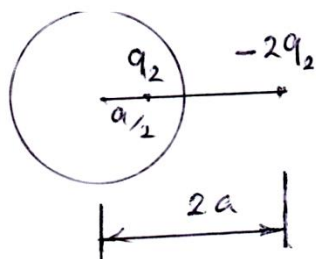
$$\vec{J}_{sm} \Big|_{z=0} = \frac{M_0}{r} \hat{a}_r \times (-\hat{a}_z) = \frac{M_0}{r} \hat{a}_\phi$$

در نقطه ی P,  $\vec{B} = 0$  است. چون  $\vec{B}$  ناشی از دو جریان سطحی در نقطه ی P اثر یکدیگر را خنثی می کنند.

۱۲ - گزینه ۱ صحیح است.



$$W_{e_1} = \frac{1}{r} q_1 V_1 = \frac{-r q_1^2}{r \times 4\pi\epsilon_0 \left( r a - \frac{a}{r} \right)}$$



$$W_{e_r} = \frac{-r q_r^2}{r \times 4\pi\epsilon_0 \left( r a - \frac{a}{r} \right)}$$

$$\Delta W_e = W_{e_r} - W_{e_1} = 0 \Rightarrow \frac{r q_1^2}{\frac{a}{r}} = \frac{r q_r^2}{\frac{r}{r}} \Rightarrow q_r = \sqrt{\frac{r}{a}} q_1$$