

رسالة محمد

پایان نامه

جهت اخذ درجه کارشناسی

در رشته علوم مهندسی-مکانیک سیالات

عنوان:

روش پتروف-گالرکین محلی بدون شبکه برای مطالعه عددی
جابجایی آزاد نانوسیال در محفظه‌های با دیواره‌های موجی شکل

چکیده:

در این تحقیق، روش پتروف-گالرکین محلی بدون شبکه با تابع آزمون واحد برای حل مسئله جابجایی طبیعی در هندسه‌های پیچیده به کار رفته است. به این منظور، معادلات پیوستگی و مومنوم در قالب معادله تابع جریان و معادله چرخش به همراه معادله انرژی، برای مسائل مختلف حل گردیده است. برای استفاده از روش پتروف-گالرکین محلی بدون شبکه، ابتدا مجموعه‌ای از گره‌ها در دامنه حل توزیع شده و سپس حول هر گره حجم کنترلی به شکل دلخواه در نظر گرفته می‌شود. معادلات حاکم با ضرب کردن در تابع آزمون واحد و انتگرال‌گیری جزء به جزء روی حجم کنترل‌ها به شکل ضعیف تبدیل می‌شوند. به منظور محاسبه انتگرال‌های موجود در شکل ضعیف معادلات حاکم، از روش انتگرال‌گیری گوسی استفاده شده و متغیرهای میدان حل در هر نقطه گوسی با استفاده از درونیایی حداقل مربعات متحرک، تقریب زده می‌شوند. با جایگذاری درونیایی در شکل ضعیف معادلات حاکم، معادله منفصل شده برای هر حجم کنترل حاصل می‌شود. با سوار کردن این معادلات برای تمام گره‌های میدان به همراه اعمال شرایط مرزی اساسی با روش درونیایی مستقیم، دستگاه معادلات منفصل شده جبری برای متغیرهای میدان حاصل می‌گردد که با حل این دستگاه معادلات، مقادیر گره‌ای متغیرهای میدان به دست خواهند آمد. به منظور صحت‌گذاری بر برنامه رایانه‌ای (تهیه شده به زبان فرترن) مسائل مختلفی در هندسه‌های ساده و پیچیده مانند انتقال حرارت هدایتی پایدار، جابجایی اجباری و جابجایی آزاد به کمک این برنامه حل گردیده و نتایج حاصل با نتایج موجود، مقایسه شده است. در انتها نیز جابجایی آزاد نانوسیال آب-اکسید آلومینیوم در محفظه‌های مربعی با دیواره‌های جانبی موجی شکل، مورد مطالعه قرار گرفته و تأثیر عواملی نظیر کسر حجمی نانوذرات، عدد رایلی، تعداد و دامنه برجستگی‌های دیواره‌های موجی شکل بر جریان و انتقال حرارت نانوسیال مورد بررسی قرار گرفته است. نتایج حاصل از این مطالعه نشان می‌دهند که ناسلت محلی روی دیواره موجی شکل دارای نموداری مشابه پروفیل دیواره می‌باشد و ناسلت متوسط در محفظه با دیواره‌های جانبی موجی شکل کمتر از ناسلت متوسط در محفظه مربعی ساده خواهد بود و افزایش کسر حجمی نانوذرات در تمام اعداد رایلی منجر به افزایش ناسلت و انتقال حرارت می‌گردد.

کلمات کلیدی: روش بدون شبکه، پتروف-گالرکین، جابجایی طبیعی، محفظه، دیواره موجی شکل، نانوسیال.

فصل اول: مقدمه

۱-۱- ماهیت روش‌های عددی.....	۱
۲-۱- روش‌های به دست آوردن معادلات انفصال.....	۲
۱-۲-۱- روش‌های شکل قوی.....	۲
۲-۲-۱- روش‌های شکل ضعیف.....	۳
۱-۲-۲-۱- استفاده از اصل تغییرات.....	۳
۲-۲-۲-۱- روش باقیمانده وزنی.....	۶

فصل دوم: روش‌های بدون شبکه

۱-۲- چرا روش بدون شبکه؟.....	۱۳
۲-۲- طبقه‌بندی و تاریخچه روش‌های بدون شبکه.....	۱۶
۱-۲-۲- روش‌های بدون شبکه شکل قوی.....	۱۷
۲-۲-۲- روش‌های بدون شبکه شکل ضعیف.....	۱۸
۳-۲-۲- روش‌های بدون شبکه شکل ضعیف-قوی.....	۲۰
۳-۲- فرآیند حل مسئله در روش‌های بدون شبکه.....	۲۲

فصل سوم: ساختار توابع شکل در روش‌های بدون شبکه

۱-۳- دامنه پشتیبانی و دامنه تاثیر.....	۲۴
۲-۳- ویژگی‌های یک درونیایی ایده‌ال در روش‌های بدون شبکه.....	۲۷
۳-۳- تکنیک‌های درونیایی در روش‌های بدون شبکه.....	۲۸
۱-۳-۳- تقریب انتگرالی.....	۲۸
۲-۳-۳- تقریب مشتقی.....	۲۹
۳-۳-۳- تقریب با استفاده از سری.....	۲۹
۴-۳- توابع شکل درونیایی PIM.....	۳۰
۵-۳- توابع شکل درونیایی LSQ.....	۳۴
۶-۳- توابع شکل درونیایی WLS.....	۳۶
۷-۳- توابع شکل درونیایی MLS.....	۳۹
۸-۳- ترسیم و مقایسه توابع شکل درونیایی‌های مختلف در حالت یک بعدی.....	۴۲
۹-۳- بررسی تاثیر نحوه توزیع گره‌ها بر توابع شکل.....	۴۵
۱۰-۳- ترسیم توابع شکل درونیایی MLS در یک مسئله دو بعدی.....	۴۷

۴۸	۳-۱۰-۱- تشریح مسئله مورد بررسی
۴۹	۳-۱۰-۲- تعیین دامنه تقریب
۴۹	۳-۱۰-۳- تعیین تابع وزن
۴۹	۳-۱۰-۴- بررسی نتایج

فصل چهارم: روش پتروف- گالرکین محلی بدون شبکه

۵۴	۴-۱- مقدمه
۵۶	۴-۲- فرمول بندی روش MLPG
۶۰	۴-۳- اعمال شرایط مرزی
۶۳	۴-۴- مفاهیم عددی و تکمیلی
۶۳	۴-۴-۱- انتگرال گیری عددی
۶۷	۴-۴-۲- انتخاب تابع آزمون
۶۹	۴-۴-۳- مزیت های روش MLPG

فصل پنجم: نانوسیال

۷۰	۵-۱- ضرورت استفاده از نانوسیال
۷۲	۵-۲- ساخت نانوسیال
۷۲	۵-۲-۱- مواد مورد استفاده در ساخت نانوسیال
۷۳	۵-۲-۲- روش های ساخت نانو ذرات
۷۳	۵-۲-۳- روش های توزیع نانو ذرات در مایعات
۷۵	۵-۳- پایدار سازی نانوسیال
۷۶	۵-۴- خواص ترمودینامیکی نانوسیال
۷۶	۵-۴-۱- لزجت
۷۷	۵-۴-۲- دانسیته، ظرفیت حرارتی و ضریب انبساط حجمی
۷۷	۵-۴-۳- هدایت حرارتی
۷۹	۵-۵- مطالعات انجام شده در زمینه نانوسیال

فصل ششم: بررسی نتایج

۸۲	۶-۱- انتقال حرارت هدایتی پایدار
۸۵	۶-۱-۱- صفحه مربعی
۸۹	۶-۱-۲- صفحه مثلثی
۹۰	۶-۱-۳- عایق لوله انتقال بخار
۹۲	۶-۱-۴- عایق لوله انتقال مواد لزج

۹۴	۲-۶- جابجایی اجباری داخلی.....
۹۴	۱-۲-۶- معادلات حاکم.....
۹۶	۲-۲-۶- طرح بالا دست.....
۹۷	۳-۲-۶- الگوریتم حل معادلات حاکم با روش $MLPG_5$
۱۰۲	۴-۲-۶- جریان کوئت.....
۱۰۳	۵-۲-۶- جریان تحت تاثیر گرادیان فشار بین دو صفحه موازی.....
۱۰۵	۴-۲-۶- میدان جریان در محفظه مربعی درپوش متحرک.....
۱۰۸	۳-۶- جابجایی آزاد داخلی.....
۱۰۸	۱-۳-۶- معادلات حاکم.....
۱۰۹	۲-۳-۶- طرح بالا دست.....
۱۱۰	۳-۳-۶- الگوریتم حل معادلات حاکم با روش $MLPG_5$
۱۱۳	۴-۳-۶- میدان جریان و میدان دما در محفظه مربعی.....
۱۱۸	۴-۶- جابجایی آزاد نانوسیال در محفظه‌های با دیواره‌های موجی شکل.....
۱۱۸	۱-۴-۶- معادلات حاکم.....
۱۲۰	۲-۴-۶- الگوریتم حل معادلات حاکم با روش $MLPG_5$
۱۲۱	۳-۴-۶- هندسه و شرایط مرزی.....
۱۲۲	۴-۴-۶- محاسبه عدد ناسلت.....
۱۲۳	۵-۴-۶- بررسی تاثیر کسر حجمی نانوذرات.....
۱۳۱	۶-۴-۶- بررسی تاثیر عدد رایلی.....
۱۳۳	۷-۴-۶- بررسی تاثیر هندسه دیواره‌های دما ثابت.....
	فصل هفتم: جمع‌بندی و پیشنهادات
۱۴۹	۱-۷- جمع‌بندی.....
۱۵۱	۲-۷- پیشنهادات.....
۱۵۲	منابع و مأخذ.....

جدول ۱-۳- حساسیت درونیابی‌های مختلف نسبت به تغییر تعداد گره‌های دامنه تقریب در تعداد توابع پایه مختلف	۴۵
جدول ۲-۳- مختصات ۲۵ گره توزیع شده در ناحیه تقریب دو بعدی برای درونیابی MLS	۴۸
جدول ۱-۵- روابط تعیین کننده لزجت نانو سیال	۷۷
جدول ۱-۶- مقایسه نتایج مطالعه حاضر، با نتایج پیشین برای جابجایی طبیعی هوا در محفظه مربعی در اعداد رایلی مختلف	۱۱۷
جدول ۲-۶- خطای بیشینه و کمینه نسبی مطالعه حاضر، با نتایج پیشین برای جابجایی طبیعی هوا در محفظه مربعی	۱۱۷
جدول ۳-۶- خصوصیات سیال پایه و ذرات نانو	۱۲۲
جدول ۴-۶- ناسلت متوسط برای محفظه با دیواره موجی شکل گرم در مقادیر مختلف n_u و A_u به ازای $Ra = 10^5$ و $\varphi = 0.1$	۱۴۶
جدول ۵-۶- ناسلت متوسط برای محفظه با دو دیواره موجی شکل - حالت ۱ در مقادیر مختلف n_u و A_u به ازای $Ra = 10^5$ و $\varphi = 0.1$	۱۴۶
جدول ۶-۶- ناسلت متوسط برای محفظه با دو دیواره موجی شکل - حالت ۲ در مقادیر مختلف n_u و A_u به ازای $Ra = 10^5$ و $\varphi = 0.1$	۱۴۷

شکل ۱-۲- جامد الاستیک خطی دو بعدی تحت بارگذاری	۴
شکل ۱-۲- نمایش دامنه به کمک روش FEM	۱۴
شکل ۲-۲- نمایش دامنه به کمک روش بدون شبکه	۱۶
شکل ۳-۲- شمای عملیاتی در روش المان محدود و روش‌های بدون شبکه	۲۳
شکل ۱-۳- دامنه پشتیبانی محلی برای تقریب تابع در روش‌های بدون شبکه	۲۵
شکل ۲-۳- ناحیه تاثیر برای تقریب تابع در روش‌های بدون شبکه	۲۶
شکل ۳-۳- مثلث پاسکال برای توابع پایه در مختصات دو بعدی	۳۱
شکل ۴-۳- تابع تقریب و مقادیر گره‌ای در درونیابی LSQ	۳۶
شکل ۵-۳- توابع وزن. W_1 : زبانه‌ای درجه ۳، W_2 : زبانه‌ای درجه چهار، W_3 : نمایی ($c = 0.3$)	۳۸
شکل ۶-۳- مشتق توابع وزن. W_1 : زبانه‌ای درجه ۳، W_2 : زبانه‌ای درجه چهار، W_3 : نمایی ($c = 0.3$)	۳۸
شکل ۷-۳- تابع تقریب و تابع وزن در درونیابی WLS	۴۱
شکل ۸-۳- تابع تقریب و تابع وزن در درونیابی MLS	۴۱
شکل ۹-۳- تابع وزن نمایی برای دامنه پشتیبانی با تعداد گره‌های مختلف	۴۳
شکل ۱۰-۳- نمودار توابع شکل حاصل از درونیابی‌های LSQ، WLS و MLS در حالت $m = 3$ و $n = 3$	۴۳
شکل ۱۱-۳- نمودار توابع شکل حاصل از درونیابی‌های LSQ، WLS و MLS در حالت $m = 3$ و $n = 5$	۴۴
شکل ۱۲-۳- نمودار توابع شکل حاصل از درونیابی‌های LSQ، WLS و MLS در حالت $m = 2$ و $n = 3$	۴۴
شکل ۱۳-۳- نمودار توابع شکل حاصل از درونیابی‌های LSQ، WLS و MLS در حالت $m = 2$ و $n = 5$	۴۴
شکل ۱۴-۳- توزیع گره‌ها با فاصله متغیر	۴۶
شکل ۱۵-۳- نمودار توابع شکل حاصل از درونیابی‌های WLS به ازای مقادیر مختلف $\frac{h}{\epsilon}$ در حالت $m = 3$	۴۶
شکل ۱۶-۳- نمودار توابع شکل حاصل از درونیابی‌های MLS به ازای مقادیر مختلف $\frac{h}{\epsilon}$ در حالت $m = 2$	۴۷

شکل ۱۷-۳- ناحیه تقریب دو بعدی برای درونیابی MLS	۴۸
شکل ۱۸-۳- تابع شکل گره ۱۳ (ϕ_{13})	۵۰
شکل ۱۹-۳- مشتق مرتبه اول تابع شکل گره ۱۳ ($\frac{\partial \phi_{13}}{\partial x}$)	۵۰
شکل ۲۰-۳- مشتق مرتبه دوم تابع شکل گره ۱۳ ($\frac{\partial^2 \phi_{13}}{\partial x^2}$)	۵۰
شکل ۲۱-۳- تابع شکل درونیابی MLS گره ۱۳ روی خط ($y = 0$) به ازای توابع شکل مختلف	۵۱

- شکل ۳-۲۲- مشتق مرتبه اول تابع شکل درونیابی MLS گره ۱۳ روی خط $(y = 0)$ به ازای توابع شکل مختلف ۵۱
- شکل ۳-۲۳- تابع شکل درونیابی MLS گره ۱۳ روی خط $(y = 0)$ به ازای $m = 3$ و $m = 6$ ۵۲
- شکل ۳-۲۴- مشتق مرتبه اول تابع شکل درونیابی MLS گره ۱۳ روی خط $(y = 0)$ به ازای $m = 3$ و $m = 6$ ۵۲
- شکل ۴-۱- دامنه محاسباتی با هندسه دلخواه ۵۶
- شکل ۴-۲- حجم کنترل محلی تقسیم شده به $n_{dx} \times n_{dy}$ زیر ناحیه که نقاط گوسی در هر زیر ناحیه توزیع شده است ۶۵
- شکل ۴-۳- مربع استاندارد گوسی ۶۶
- شکل ۴-۴- زیر ناحیه مستطیلی با ابعاد دلخواه ۶۷
- شکل ۶-۱- صفحه مربعی، شرایط مرزی و حل تحلیلی - حالت اول ۸۵
- شکل ۶-۲- توزیع گره‌ها و توزیع دما در صفحه مربعی - حالت اول ۸۶
- شکل ۶-۳- نمودار $T(0.5, y)$ برای صفحه مربعی - حالت اول ۸۶
- شکل ۶-۴- نمودار لگاریتم نورم خطا بر حسب لگاریتم اندازه حجم کنترل برای صفحه مربعی - حالت اول ۸۷
- شکل ۶-۵- صفحه مربعی، شرایط مرزی و حل تحلیلی - حالت دوم ۸۷
- شکل ۶-۶- توزیع گره‌ها و توزیع دما در صفحه مربعی - حالت دوم ۸۸
- شکل ۶-۷- نمودار $T(0.5, y)$ برای صفحه مربعی - حالت دوم ۸۸
- شکل ۶-۸- صفحه مثلثی، شرایط مرزی و حل تحلیلی ۸۹
- شکل ۶-۹- توزیع گره‌ها و توزیع دما در صفحه مثلثی ۸۹
- شکل ۶-۱۰- مدل فیزیکی و میدان محاسباتی برای عایق لوله انتقال بخار ۹۰
- شکل ۶-۱۱- توزیع گره‌ها و شبکه‌بندی در میدان محاسباتی عایق لوله انتقال بخار ۹۱

- شکل ۶-۱۲- توزیع دما در میدان محاسباتی عایق لوله انتقال بخار..... ۹۱
- شکل ۶-۱۳- نمودار $T(x, y)$ برای میدان محاسباتی عایق لوله انتقال بخار در امتداد خط ۱..... ۹۱
- شکل ۶-۱۴- مدل فیزیکی و میدان محاسباتی برای عایق لوله انتقال قیر..... ۹۲
- شکل ۶-۱۵- توزیع گره‌ها و شبکه‌بندی در میدان محاسباتی عایق لوله انتقال قیر..... ۹۳
- شکل ۶-۱۶- توزیع دما در میدان محاسباتی عایق لوله انتقال قیر..... ۹۳
- شکل ۶-۱۷- نمودار $T(x, y)$ برای میدان محاسباتی عایق لوله انتقال قیر در امتداد خط ۱..... ۹۳
- شکل ۶-۱۸- مدل فیزیکی و شرایط مرزی برای جریان کوئت..... ۱۰۲
- شکل ۶-۱۹- توزیع گره‌ها (۴۴۱ گره) برای حل عددی جریان کوئت به کمک روش MLPG۵..... ۱۰۲
- شکل ۶-۲۰- نمودار سرعت افقی بدون بعد و تابع جریان بدون بعد روی خط مرکزی عمودی مجرا در جریان کوئت..... ۱۰۳
- شکل ۶-۲۱- مدل فیزیکی و شرایط مرزی برای جریان تحت تاثیر گرادیان فشار بین دو صفحه موازی..... ۱۰۳
- شکل ۶-۲۲- توزیع گره‌ها (۲۱۲۱ گره) برای حل عددی جریان تحت تاثیر گرادیان فشار بین دو صفحه موازی به کمک روش MLPG۵..... ۱۰۴
- شکل ۶-۲۳- نمودار $G_{f,x} Re_H$ بر حسب $\frac{x}{Re_H}$ روی دیواره پایینی مجرا در جریان تحت تاثیر گرادیان فشار بین دو صفحه موازی..... ۱۰۴
- شکل ۶-۲۴- نمودار سرعت افقی بدون بعد و تابع جریان بدون بعد در مقطع انتهایی مجرا در جریان تحت تاثیر گرادیان فشار بین دو صفحه موازی..... ۱۰۵
- شکل ۶-۲۵- مدل فیزیکی و شرایط مرزی در محفظه مربعی درپوش متحرک..... ۱۰۵
- شکل ۶-۲۶- توزیع گره‌ها در محفظه مربعی درپوش متحرک در اعداد رینولدز مختلف..... ۱۰۶
- شکل ۶-۲۷- خطوط جریان در محفظه مربعی درپوش متحرک در اعداد رینولدز مختلف..... ۱۰۶
- شکل ۶-۲۸- نمودار سرعت افقی بدون بعد روی خط مرکزی عمودی و نمودار سرعت عمودی بدون بعد روی خط مرکزی افقی، برای محفظه مربعی درپوش متحرک در اعداد رینولدز مختلف..... ۱۰۷
- شکل ۶-۲۹- محفظه مربعی و شرایط مرزی..... ۱۱۴
- شکل ۶-۳۰- توزیع گره‌ها در محفظه مربعی در اعداد رایلی مختلف..... ۱۱۴
- شکل ۶-۳۱- خطوط جریان و خطوط همدمما در محفظه مربع شکل در اعداد رایلی مختلف..... ۱۱۵
- شکل ۶-۳۳- توزیع گره‌ها (۹۶۱ گره) در محفظه با دو دیواره موجی شکل- حالت ۱، $n_u = 3$ و $A_u = 0.05$ ۱۲۳
- شکل ۶-۳۴- خطوط جریان و خطوط همدمما به ازای مقادیر مختلف کسر حجمی برای محفظه با دو دیواره موجی شکل- حالت ۱، $n_u = 3$ و $A_u = 0.05$ در $Ra = 10^2$ ۱۲۴
- شکل ۶-۳۵- خطوط جریان و خطوط همدمما به ازای مقادیر مختلف کسر حجمی برای محفظه با دو دیواره موجی شکل در حالت ۱، $n_u = 3$ و $A_u = 0.05$ در $Ra = 10^4$ ۱۲۵

- شکل ۶-۳۶- خطوط جریان و خطوط همدمها به ازای مقادیر مختلف کسر حجمی برای محفظه با دو دیواره موجی شکل- حالت ۱، $n_{II} = 3$ و $A_{II} = 0.05$ در $Ra = 10^5$ ۱۲۶
- شکل ۶-۳۷- نمودار سرعت عمودی بدون بعد روی خط مرکزی افقی و سرعت افقی بدون بعد روی خط مرکزی عمودی به ازای مقادیر مختلف کسر حجمی برای محفظه با دو دیواره موجی شکل - حالت ۱، $n_{II} = 3$ و $A_{II} = 0.05$ در اعداد رایلی مختلف..... ۱۲۷
- شکل ۶-۳۸- نمودار تابع جریان بیشینه بر حسب کسر حجمی برای برای محفظه با دو دیواره موجی شکل- حالت ۱، $n_{II} = 3$ و $A_{II} = 0.05$ در اعداد رایلی مختلف..... ۱۲۸
- شکل ۶-۳۹- نمودار دمای بی بعد روی خط مرکزی افقی و ناسلت موضعی روی دیواره گرم به ازای مقادیر مختلف کسر حجمی برای محفظه با دو دیواره موجی شکل - حالت ۱، $n_{II} = 3$ و $A_{II} = 0.05$ در اعداد رایلی مختلف..... ۱۲۹
- شکل ۶-۴۰- ناسلت متوسط بر حسب کسر حجمی برای محفظه با دو دیواره موجی شکل - حالت ۱، $n_{II} = 3$ و $A_{II} = 0.05$ در اعداد رایلی مختلف..... ۱۳۰
- شکل ۶-۴۱- نمودار سرعت عمودی روی خط مرکزی افقی و سرعت افقی روی خط مرکزی عمودی به ازای $\varphi = 0.1$ برای محفظه با دو دیواره موجی شکل- حالت ۱، $n_{II} = 3$ و $A_{II} = 0.05$ در اعداد رایلی مختلف..... ۱۳۱
- شکل ۶-۴۲- نمودار دمای بی بعد روی خط مرکزی افقی و ناسلت موضعی به ازای $\varphi = 0.1$ برای محفظه با دو دیواره موجی شکل- حالت ۱، $n_{II} = 3$ و $A_{II} = 0.05$ در اعداد رایلی مختلف..... ۱۳۲
- شکل ۶-۴۳- توزیع گره‌ای، خطوط جریان و خطوط همدمها برای محفظه مربعی ساده در $\varphi = 0.1$ و $Ra = 10^5$ ۱۳۳
- شکل ۶-۴۴- توزیع گره‌ای، خطوط جریان و خطوط همدمها برای محفظه با دیواره موجی شکل گرم با $n_{II} = 1$ به ازای مقادیر مختلف A_{II} در $\varphi = 0.1$ و $Ra = 10^5$ ۱۳۴
- شکل ۶-۴۵- توزیع گره‌ای، خطوط جریان و خطوط همدمها برای محفظه با دیواره موجی شکل گرم با $n_{II} = 3$ به ازای مقادیر مختلف A_{II} در $\varphi = 0.1$ و $Ra = 10^5$ ۱۳۵
- شکل ۶-۴۶- توزیع گره‌ای، خطوط جریان و خطوط همدمها برای محفظه با دیواره موجی شکل گرم با $n_{II} = 5$ به ازای مقادیر مختلف A_{II} در $\varphi = 0.1$ و $Ra = 10^5$ ۱۳۶
- شکل ۶-۴۷- توزیع گره‌ای، خطوط جریان و خطوط همدمها برای محفظه با دو دیواره موجی شکل- حالت ۱ با $n_{II} = 1$ به ازای مقادیر مختلف A_{II} در $\varphi = 0.1$ و $Ra = 10^5$ ۱۳۷
- شکل ۶-۴۸- توزیع گره‌ای، خطوط جریان و خطوط همدمها برای محفظه با دو دیواره موجی شکل- حالت ۱ با $n_{II} = 3$ به ازای مقادیر مختلف A_{II} در $\varphi = 0.1$ و $Ra = 10^5$ ۱۳۸
- شکل ۶-۴۹- توزیع گره‌ای، خطوط جریان و خطوط همدمها برای محفظه با دو دیواره موجی شکل- حالت ۱ با $n_{II} = 5$ به ازای مقادیر مختلف A_{II} در $\varphi = 0.1$ و $Ra = 10^5$ ۱

- شکل ۶-۵۰- توزیع گره‌ای، خطوط جریان و خطوط همدمما برای محفظه با دو دیواره موجی شکل - حالت ۲ با $n_u = 1$ به ازای مقادیر مختلف A_u در $\varphi = 0.1$ و $Ra = 10^5$ ۱۴۰
- شکل ۶-۵۱- توزیع گره‌ای، خطوط جریان و خطوط همدمما برای محفظه با دو دیواره موجی شکل - حالت ۲ با $n_u = 3$ به ازای مقادیر مختلف A_u در $\varphi = 0.1$ و $Ra = 10^5$ ۱۴۱
- شکل ۶-۵۲- توزیع گره‌ای، خطوط جریان و خطوط همدمما برای محفظه با دو دیواره موجی شکل - حالت ۲ با $n_u = 5$ به ازای مقادیر مختلف A_u در $\varphi = 0.1$ و $Ra = 10^5$ ۱۴۲
- شکل ۶-۵۳- نمودار ناسلت محلی روی دیواره گرم برای محفظه با دیواره موجی شکل گرم در $n_u = 1$ و A_u های مختلف به ازای $\varphi = 0.1$ و $Ra = 10^5$ ۱۴۳
- شکل ۶-۵۴- نمودار ناسلت محلی روی دیواره گرم برای محفظه با دیواره موجی شکل گرم در $n_u = 3$ و A_u های مختلف به ازای $\varphi = 0.1$ و $Ra = 10^5$ ۱۴۳
- شکل ۶-۵۵- نمودار ناسلت محلی روی دیواره گرم برای محفظه با دیواره موجی شکل گرم در $n_u = 5$ و A_u های مختلف به ازای $\varphi = 0.1$ و $Ra = 10^5$ ۱۴۳
- شکل ۶-۵۶- نمودار ناسلت محلی روی دیواره گرم برای محفظه با دو دیواره موجی - حالت ۱ در $n_u = 1$ و A_u های مختلف به ازای $\varphi = 0.1$ و $Ra = 10^5$ ۱۴۴
- شکل ۶-۵۷- نمودار ناسلت محلی روی دیواره گرم برای محفظه با دو دیواره موجی - حالت ۱ در $n_u = 3$ و A_u های مختلف به ازای $\varphi = 0.1$ و $Ra = 10^5$ ۱۴۴
- شکل ۶-۵۸- نمودار ناسلت محلی روی دیواره گرم برای محفظه با دو دیواره موجی - حالت ۱ در $n_u = 5$ و A_u های مختلف به ازای $\varphi = 0.1$ و $Ra = 10^5$ ۱۴۴
- شکل ۶-۵۹- نمودار ناسلت محلی روی دیواره گرم برای محفظه با دو دیواره موجی - حالت ۲ در $n_u = 1$ و A_u های مختلف به ازای $\varphi = 0.1$ و $Ra = 10^5$ ۱۴۵
- شکل ۶-۶۰- نمودار ناسلت محلی روی دیواره گرم برای محفظه با دو دیواره موجی - حالت ۲ در $n_u = 3$ و A_u های مختلف به ازای $\varphi = 0.1$ و $Ra = 10^5$ ۱۴۵
- شکل ۶-۶۱- نمودار ناسلت محلی روی دیواره گرم برای محفظه با دو دیواره موجی - حالت ۲ در $n_u = 5$ و A_u های مختلف به ازای $\varphi = 0.1$ و $Ra = 10^5$ ۱۴۵
- شکل ۶-۶۲- نمودار HTR بر حسب A_u در مقادیر مختلف n_u برای محفظه در حالات مختلف به ازای $\varphi = 0.1$ و $Ra = 10^5$ ۱۴۷

فصل اول

مقدمه

همه پدیده‌های موجود در طبیعت، اعم از مکانیکی، زمین‌شناختی، الکتریکی و یا حتی زیست‌شناختی به وسیله معادلات جبری، دیفرانسیلی و یا انتگرالی قابل توصیف هستند. هرچند به دست آوردن حل تحلیلی برای این معادلات، مطلوب است اما به دلیل پیچیده بودن معادلات حاکم، تنها برای تعداد بسیار کمی از این معادلات حل تحلیلی وجود دارد. بنابراین برای به دست آوردن حل تقریبی این معادلات از روش‌های عددی استفاده می‌شود. شایان ذکر است که امروزه با توجه به پیشرفت سریع کامپیوترها، مهندسیین و محققین بر روی استفاده از روش‌های عددی با استفاده از کامپیوتر برای حل تقریبی معادلات پیچیده تاکید فراوان دارند.

۱-۱- ماهیت روش‌های عددی

ایده اصلی یک روش عددی، گسسته‌سازی متغیر وابسته یک معادله دیفرانسیل در تعداد محدودی از مکان‌ها به نام گره^۱ (که در حوزه محاسباتی قرار دارند) و تبدیل معادله به دستگاه معادلات ساده جبری و قابل حل می‌باشد. با متمرکز کردن توجه روی مقادیر موجود در گره‌ها، اطلاعات پیوسته‌ای را که در حل دقیق معادله دیفرانسیل وجود دارد با مقادیر جدا از هم تعویض کرده‌ایم، از این رو به این دسته از روش‌های عددی، روش‌های انفعال^۲ و به معادلات جبری حاصل از آن‌ها معادلات انفعال گفته می‌شود.

^۱ node

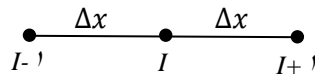
^۲ discretization methods

۲-۱- روش‌های به دست آوردن معادلات انفصال

در به دست آوردن معادلات انفصال برای معادلات دیفرانسیل دو رویکرد وجود دارد: روش‌های شکل قوی^۱ و روش‌های شکل ضعیف^۲.

۱-۲-۱- روش‌های شکل قوی

این روش‌ها از شکل اصلی معادلات دیفرانسیل و شرایط مرزی آن‌ها استفاده می‌کنند به همین دلیل، تابع تقریب باید شرط مشتق‌پذیری تا مرتبه معادله دیفرانسیل را دارا باشد. یک نمونه از روش‌های عددی که در آن از شکل قوی معادلات استفاده می‌شود روش تفاضل محدود^۳ است. در این روش ابتدا میدان حل شبکه بندی می‌شود و سپس با استفاده از سری تیلور، مقادیر مشتقات متغیر وابسته در معادله دیفرانسیل تا مرتبه دقت دلخواه تقریب زده شده و بر حسب مقادیر گره‌ای متغیر وابسته در معادله جایگذاری می‌شود. بدین وسیله معادله دیفرانسیل در هر نقطه از شبکه به یک معادله جبری تبدیل شده و در مجموع یک دستگاه معادلات جبری برای کل میدان به دست می‌آید که با حل آن، مقدار متغیر مسئله در کلیه نقاط شبکه به دست می‌آید. به عنوان مثال اگر u متغیر وابسته یک معادله دیفرانسیل باشد (که روی حوزه محاسباتی نشان داده شده در شکل (۱-۱) تعریف شده است) برای انفصال مشتق مرتبه اول و دوم آن در گره I به صورت زیر عمل می‌کنیم:



شکل ۱-۱- سه گره متوالی استفاده شده برای بسط سری تیلور.

$$u_{I-1} = u_I - \Delta x \left(\frac{du}{dx} \right)_I + \frac{1}{2} (\Delta x)^2 \left(\frac{d^2u}{dx^2} \right)_I - \dots \quad (1-1)$$

$$u_{I+1} = u_I + \Delta x \left(\frac{du}{dx} \right)_I + \frac{1}{2} (\Delta x)^2 \left(\frac{d^2u}{dx^2} \right)_I + \dots \quad (2-1)$$

^۱ strong-form methods

^۲ weak-form methods

^۳ finite difference method (FDM)

با برش دادن سری بعد از جمله سوم و جمع و تفریق کردن دو معادله خواهیم داشت:

$$\left(\frac{du}{dx}\right)_I = \frac{u_{I+1} - u_{I-1}}{2\Delta x} \quad (3-1)$$

$$\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)_I = \frac{u_{I+1} - 2u_I + u_{I-1}}{\Delta x^2} \quad (4-1)$$

جایگذاری چنین عباراتی در معادله دیفرانسیل در هر گره از دامنه حل منتهی به معادلات تفاضل محدود می‌شود. فرمول‌بندی از طریق سری تیلور نسبتاً ساده است ولی انعطاف‌پذیری کمتری دارد به گونه‌ای که این روش به یک شبکه-بندی با سازمان نیاز داشته و تنها برای مسائل با هندسه ساده و منظم قابل کاربرد است.

۱-۲-۲- روش‌های شکل ضعیف

در این روش‌ها با توجه به استفاده از شکل انتگرالی معادلات، مرتبه پیوستگی لازم برای تابع تقریب کاهش می‌یابد (و از همین رو شکل ضعیف نامیده می‌شوند). استفاده از شکل ضعیف قابلیت کاربرد شیوه‌های مختلفی را برای فرمول-بندی و حل تقریبی معادلات فراهم می‌کند. فرمول‌بندی‌های بر مبنای شکل ضعیف معمولاً دستگاه معادلات منفصل شده پایدار ایجاد می‌کنند و نتایج حاصل دقیق‌تر خواهند بود.

دو روش عمده برای بدست آوردن شکل ضعیف معادلات وجود دارد: استفاده از اصل تغییرات^۱ و روش باقیمانده

وزنی^۲.

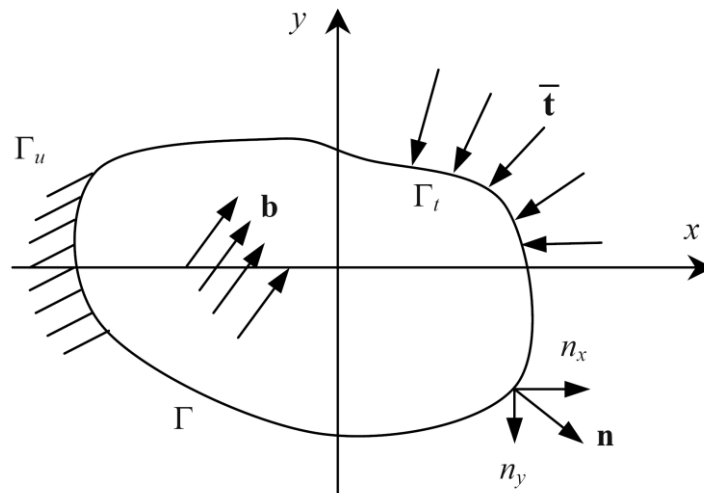
۱-۲-۲-۱- استفاده از اصل تغییرات

برای فهم کامل این روش، خواننده باید شناخت کافی از شاخه حساب تغییرات داشته باشد. حساب تغییرات نشان می‌دهد حل معادلات دیفرانسیل معین با کمینه کردن یک کمیت نسبی که تابع تابع^۳ نامیده می‌شود هم ارز است. این هم‌ارزی به عنوان اصل تغییرات شناخته می‌شود. اگر تابع تابع نسبت به مقادیر گره‌ای متغیر وابسته کمینه شود، نتایج حاصل از آن به همراه استفاده از تابع تقریب معادلات انفصال لازم را به دست خواهند داد. به عنوان مثال برای یک جامد الاستیک خطی (شکل ۱-۲) معادلات انفصال با استفاده از اصل تغییرات به دست آورده می‌شود:

^۱ variational principle

^۲ weighted residual method

^۳ functional



شکل ۱-۲- جامد الاستیک خطی دو بعدی تحت بارگذاری.

در این حالت انرژی پتانسیل کل به صورت تفاضل انرژی کرنشی (Π_s) و کار نیروهای خارجی (W_f) تعریف می‌شود:

$$\Pi = \Pi_s - W_f \quad (5-1)$$

در جامدات الاستیک انرژی کرنشی برابر است با:

$$\Pi_s = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega \quad (6-1)$$

در رابطه فوق $\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix}$ و $\boldsymbol{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}$ به ترتیب تانسور کرنش و تانسور تنش می‌باشند.

کار نیروهای خارجی عبارت است از:

$$W_f = \int_{\Omega} \mathbf{u}^T \mathbf{b} \, d\Omega + \int_{\Gamma_t} \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{t}} \, d\Gamma \quad (7-1)$$

در رابطه فوق $\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}$ بردار جابجایی، $\bar{\mathbf{t}} = \begin{Bmatrix} \bar{t}_x \\ \bar{t}_y \end{Bmatrix}$ بردار نیروی سطحی و $\mathbf{b} = \begin{Bmatrix} b_x \\ b_y \end{Bmatrix}$ بردار نیروی حجمی می‌باشند.

بنابراین انرژی پتانسیل کل به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{u}^T \mathbf{b} \, d\Omega - \int_{\Gamma_t} \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{t}} \, d\Gamma \quad (8-1)$$

با توجه به اصل مینیمم انرژی پتانسیل، Π (که در این حالت تابع تابع است) باید کمینه باشد یعنی:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{u}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Pi}{\partial u} \\ \frac{\partial \Pi}{\partial v} \end{pmatrix} = 0 \quad (9-1)$$

با توجه به اصل تغییرات می‌دانیم که معادله فوق معادل با $\delta \Pi = 0$ (نماد وردش می‌باشد) است. وردش انرژی پتانسیل برابر است با:

$$\begin{aligned} \delta \Pi &= \delta \left(\frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{u}^T \mathbf{b} \, d\Omega - \int_{\Gamma_t} \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{t}} \, d\Gamma \right) \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \delta(\boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma}) \, d\Omega - \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{b} \, d\Omega - \int_{\Gamma_t} \delta \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{t}} \, d\Gamma \end{aligned} \quad (10-1)$$

با استفاده از قاعده زنجیره‌ای:

$$\delta(\boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma}) = \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\varepsilon}^T \delta \boldsymbol{\sigma} \quad (11-1)$$

با توجه به تقارن تانسورهای تنش و کرنش:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^T \delta \boldsymbol{\sigma} = (\boldsymbol{\varepsilon}^T \delta \boldsymbol{\sigma})^T = \delta \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon} \quad (12-1)$$

با کاربرد معادله بنیادی جامدات الاستیک خطی ($\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}$) و با توجه به تقارن ماتریس $\mathbf{D} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$:

$$\delta \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon} = \delta(\mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon})^T \boldsymbol{\varepsilon} = \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D}^T \boldsymbol{\varepsilon} = \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} = \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} \quad (13-1)$$

با جایگذاری معادله (13-1) در معادله (11-1):

$$\delta(\boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma}) = 2 \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} \quad (14-1)$$

بنابراین معادله (10-1) به صورت زیر در می‌آید:

$$\delta \Pi = \int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega - \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{b} \, d\Omega - \int_{\Gamma_t} \delta \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{t}} \, d\Gamma \quad (15-1)$$

با توجه به اصل مینیمم انرژی پتانسیل ($\delta \Pi = 0$) معادله حاکم بر سیستم نهایتاً به صورت زیر بدست می‌آید: (16-1)

$$\int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega - \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{b} \, d\Omega - \int_{\Gamma_t} \delta \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{t}} \, d\Gamma = 0$$

برای جامدات الاستیک خطی با به کار بردن روابط تنش- کرنش ($\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}$) و کرنش - جابجایی ($\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L}\mathbf{u}$) که

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \cdot \\ \cdot & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}$$

می توان معادله (۱۶-۱) را به صورت زیر تنها بر حسب بردار جابجایی \mathbf{u} نوشت:

$$\int_{\Omega} \delta(\mathbf{L}\mathbf{u})^T \mathbf{D}(\mathbf{L}\mathbf{u}) \, d\Omega - \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{b} \, d\Omega - \int_{\Gamma_t} \delta \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{t}} \, d\Gamma = \cdot \quad (17-1)$$

معادله (۱۷-۱) معادله فرم ضعیف گالرکین^۱ نامیده می شود. با جایگذاری تابع تقریب به جای \mathbf{u} (به فصل سوم مراجعه شود.) که بر حسب مقادیر گره ای می باشد معادلات انفصال به دست خواهند آمد.

علاوه بر پیچیدگی جبری و مفهومی این روش، اشکال اصلی آن در محدود بودن قابلیت اجرای آن است، زیرا یک اصل تغییرات برای همه معادلات دیفرانسیل وجود ندارد و معمولاً از این روش در مسائل مربوط به حوزه جامدات که اصولی نظیر اصل مینیم انرژی پتانسیل و اصل همیلتن در مورد آن ها صادق است، استفاده می شود.

۱-۲-۲- روش باقیمانده وزنی

این روش یک روش کلی و فوق العاده قوی در بدست آوردن حل تقریبی برای معادلات دیفرانسیل معمولی یا جزئی است. بسیاری از روش های عددی را می توان بر مبنای روش باقیمانده وزنی فرمول بندی کرد. برای توضیح این روش معادله دیفرانسیل (جزئی) زیر را در نظر بگیرید:

$$F(\mathbf{u}) + \mathbf{b} = \cdot \quad \text{In problem domain } \Omega \quad (18-1)$$

F یک عملگر دیفرانسیلی (جزئی) بوده که بر روی متغیر \mathbf{u} اثر می گذارد و \mathbf{b} جمله چشمه میدان است. شرایط مرزی برای این معادله دیفرانسیل به صورت زیر است:

$$G(\mathbf{u}) = \mathbf{g} \quad \text{on the boundary } \Gamma \quad (19-1)$$

که G نیز یک عملگر دیفرانسیلی (جزئی) برای شرایط مرزی می باشد.

فرض کنید \mathbf{u}^h یک پاسخ تقریبی برای معادلات (۱۸-۱) و (۱۹-۱) بوده و به صورت زیر تعریف شود:

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^m p_i(\mathbf{x}) a_i = \mathbf{P}^T \mathbf{a} \quad (20-1)$$

^۱ Galerkin weak-form

در این رابطه $p_i(\mathbf{x})$ جمله i ام توابع پایه^۱ و a_i ضریب مجهول این جمله که باید تعیین شود و m تعداد توابع پایه به کار رفته است (به فصل ۳ مراجعه شود). با جایگذاری مقدار \mathbf{u}^h در این معادلات داریم:

$$F(\mathbf{u}^h) + \mathbf{b} \neq \cdot \quad (21-1)$$

$$G(\mathbf{u}^h) - \mathbf{g} \neq \cdot \quad (22-1)$$

مقادیر بدست آمده از جایگذاری پاسخ تقریبی در معادلات اصطلاحاً باقیمانده معادلات نامیده می‌شوند. برای معادلات فوق داریم:

$$F(\mathbf{u}^h) + \mathbf{b} = R_S \quad (23-1)$$

$$G(\mathbf{u}^h) - \mathbf{g} = R_b \quad (24-1)$$

که R_S و R_b به ترتیب باقیمانده معادله حاکم بر سیستم (تعریف شده در دامنه مسئله Ω) و باقیمانده معادله شرط مرزی (تعریف شده در مرز دامنه Γ) هستند. اگر \mathbf{u}^h پاسخ دقیق معادلات حاکم باشد مقادیر R_S و R_b صفر خواهند بود. به هر صورت در بسیاری از مسائل عملی پاسخ دقیق در دسترس نیست و مقادیر R_S و R_b در حالت کلی صفر نیستند. باید توجه داشت که R_S و R_b با انتخاب توابع تقریب مختلف تغییر می‌کنند. بنابراین می‌توان روش‌هایی را اتخاذ کرد که تابع تقریب به گونه‌ای انتخاب شود که مقادیر باقیمانده تا حد امکان کوچک شوند. یک راه این است که با مساوی صفر قرار دادن انتگرال وزنی باقیمانده‌ها، مقادیر باقیمانده به طور متوسط به صفر میل پیدا کنند. یعنی:

$$\int_{\Omega} W_i R_S d\Omega + \int_{\Gamma} V_i R_b d\Gamma = \cdot \quad (25-1)$$

که در این رابطه W و V به ترتیب توابع وزن^۲ برای باقیمانده‌های R_S و R_b هستند. شایان ذکر است که تابع تقریب \mathbf{u}^h را می‌توان به گونه‌ای انتخاب کرد که شرایط مرزی را ارضا کند؛ در این حالت مقدار R_b صفر شده و معادله (۲۵-۱) به صورت زیر ساده می‌شود:

$$\int_{\Omega} W_i R_S d\Omega = \cdot \quad (26-1)$$

با جایگذاری روابط (۲۳-۱) و (۲۴-۱) در رابطه (۲۵-۱) داریم:

$$\int_{\Omega} W_i [F(\mathbf{u}^h) + \mathbf{b}] d\Omega + \int_{\Gamma} V_i [G(\mathbf{u}^h) - \mathbf{g}] d\Gamma = \cdot \quad (27-1)$$

^۱ basis function
^۲ weight function

این فرمول‌بندی کلی روش باقیمانده وزنی است که برای بسط روش‌های عددی مختلف به کار می‌رود. عملگر انتگرال از طریق اعمال روش جزء به جزء باعث کاهش مرتبه عملگرهای دیفرانسیلی می‌شود و مرتبه پیوستگی لازم برای تابع تقریب را کاهش می‌دهد.

در روش باقیمانده وزنی با انتخاب توابع وزن مختلف، روش‌های عددی گوناگونی حاصل می‌شود که هر کدام عملکرد خاص خود را دارد. در زیر تعدادی از این روش‌ها شرح داده شده است:

(۱) روش ترکیب^۱

اگر از تابع دلتای دیراک^۲ به عنوان تابع وزن در رابطه (۲۷-۱) استفاده شود داریم:

$$\int_{\Omega} \delta(x - x_i)[F(\mathbf{u}^h) + \mathbf{b}] d\Omega + \int_{\Gamma} \delta(x - x_i)[G(\mathbf{u}^h) - \mathbf{g}] d\Gamma = 0 \quad (28-1)$$

$$\Rightarrow [F(\mathbf{u}^h(x_i)) + \mathbf{b}] + [G(\mathbf{u}^h(x_i)) - \mathbf{g}] = R_s(x_i) + R_b(x_i) = 0$$

معادله (۲۸-۱) در نقاط x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) انتخاب شده در دامنه مسئله اعمال می‌شود که بدین معنی است که با اعمال این روش مقدار باقیمانده‌ها در این n نقطه صفر می‌شود. مشاهده می‌شود که با انتخاب تابع دلتای دیراک به عنوان تابع وزن، مسئله ارضای معادله حاکم و شرایط مرزی (به شکل انتگرالی) در کل دامنه مسئله و مرز آن تبدیل به ارضای معادلات حاکم و شرایط مرزی تنها در تعداد محدودی نقطه پخش شده در دامنه و مرز آن می‌شود. این روش اصطلاحاً روش ترکیب نامیده می‌شود و به نظر می‌رسد که اولین بار توسط اسلیتر^۳ (۱۹۳۴) برای حل مسائل کران‌های انرژی الکترونیکی در فلزات به کار رفت [۱]. توسعه‌ها و کاربردهای اولیه این روش در کارهای بارتا^۴ (۱۹۳۷)، فریزر^۵ و همکاران (۱۹۳۷)، لانکوزس^۶ (۱۹۳۸) و ... دیده می‌شود [۲-۴]. روش لانکوزس که به روش ترکیب متعامد^۷ معروف است از ریشه‌های چند جمله‌ای‌های چیبیشف^۸ به عنوان نقاط انتخابی دامنه استفاده می‌کند [۴].

(۲) روش زیردامنه^۹

^۱ Collocation method

^۲ Dirac delta function

^۳ Slater

^۴ Barta

^۵ Frazer

^۶ Lanczos

^۷ orthogonal collocation method

^۸ Chebyshev

^۹ Subdomain method

در روش زیردامنه از تابع پله واحد که به صورت زیر تعریف می‌شود به عنوان تابع وزن در رابطه (۲۷-۱) استفاده می‌شود:

$$W_i = \begin{cases} 1, & x_i \in \Omega_i \\ 0, & x_i \notin \Omega_i \end{cases}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (29-1)$$

بنابراین معادله (۲۷-۱) به صورت زیر در می‌آید:

$$\int_{\Omega_i} [F(\mathbf{u}^h) + \mathbf{b}] d\Omega + \int_{\Gamma_i} [G(\mathbf{u}^h) - \mathbf{g}] d\Gamma = 0 \quad (30-1)$$

که در این معادله Γ_i فصل مشترک زیردامنه Ω_i با مرز دامنه مسئله (Γ) است. معادله (۳۰-۱) به این معناست که در روش زیر دامنه باقیمانده‌ها به صورت متوسط وزنی در هر زیردامنه (Ω_i) انتخاب شده در کل دامنه مسئله به صفر میل می‌کنند. این روش نخستین بار به وسیله بیزنو^۱ و کخ^۲ (۱۹۲۳)، بیزنو (۱۹۲۳) و بیزنو و گرامل^۳ (۱۹۵۵) ارائه شد [۸-۵].

۳ روش مینیمم مربعات^۴

روش مینیمم مربعات اولین بار توسط گوس^۵ در سال ۱۷۹۵ و لژاندر^۶ در سال ۱۸۰۶ ارائه شد. پیکن^۷ (۱۹۲۸) روش مینیمم مربعات را برای حل معادلات دیفرانسیل به کار برد [۹]. به منظور معرفی این روش تابع تابع زیر در نظر بگیرید:

$$J(\alpha_i) = \int_{\Omega} R_s \cdot R_s d\Omega \quad (31-1)$$

هدف به دست آوردن مقادیر α_i است به گونه‌ای که مقدار تابع تابع J مینیمم شود. بنابراین داریم:

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha_i} = \int_{\Omega} \frac{\partial(R_s \cdot R_s)}{\partial \alpha_i} d\Omega = 2 \int_{\Omega} \frac{\partial(R_s)}{\partial \alpha_i} R_s d\Omega = 0 \quad (32-1)$$

$$\Rightarrow \int_{\Omega} \frac{\partial(R_s)}{\partial \alpha_i} R_s d\Omega = 0 \quad (33-1)$$

بنابراین از دیدگاه روش باقیمانده وزنی، تابع وزن به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$W_i = \frac{\partial R_s}{\partial \alpha_i} = \frac{\partial F(u^h)}{\partial \alpha_i} \quad (34-1)$$

^۱ Biezeno
^۲ Koch
^۳ Grammel
^۴ least squares method
^۵ Gauss
^۶ Legendre
^۷ Picone

به روش مشابه داریم:

$$V_i = \frac{\partial R_b}{\partial a_i} = \frac{\partial G(\mathbf{u}^h)}{\partial a_i} \quad (35-1)$$

با استفاده از توابع وزن فوق معادله (۲۷-۱) به صورت زیر در می‌آید:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial F(\mathbf{u}^h)}{\partial a_i} [F(\mathbf{u}^h) + \mathbf{b}] d\Omega + \int_{\Gamma} \frac{\partial G(\mathbf{u}^h)}{\partial a_i} [G(\mathbf{u}^h) - \mathbf{g}] d\Gamma = 0 \quad (36-1)$$

که $i = 1, 2, \dots, n$. رابطه فوق n معادله برای n ضریب a_i به دست می‌دهد که با حل آنها برای a_i ها پاسخ تقریبی

برای معادله دیفرانسیل به دست می‌آید.

۴ روش ممان^۱

توابع وزن را می‌توان به صورت تک جمله‌ای‌های x^1, x^2, \dots, x^n و ... در نظر گرفت. با این کار ممان‌های به ترتیب از مرتبه بالاتر باقیمانده‌ها صفر می‌شوند. این روش که روش ممان نامیده می‌شود توسط یامادا^۲ (۱۹۴۷) و فوجیتا^۳ (۱۹۵۱) ابداع شد [۱۰-۱۱]. این روش به صورت زیر فرمولبندی می‌شود:

$$W_i = V_i = x_i^{i-1}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (37-1)$$

$$\Rightarrow \int_{\Omega} x_i^{i-1} [F(\mathbf{u}^h) + \mathbf{b}] d\Omega + \int_{\Gamma} x_i^{i-1} [G(\mathbf{u}^h) - \mathbf{g}] d\Gamma = 0 \quad (38-1)$$

مجدداً n معادله برای n ضریب a_i حاصل می‌شود که با حل آنها برای a_i ها پاسخ تقریبی برای معادله دیفرانسیل به دست می‌آید. قابل توجه است که دستگاه معادلات حاصل اغلب بد حالت^۴ است. یک راه حل، استفاده از چندجمله‌ای‌های چبیشف به جای تک جمله‌ای‌هاست.

۵ روش گالرکین

روش گالرکین (گالرکین، ۱۹۱۵) را می‌توان حالت خاصی از روش باقیمانده وزنی دانست که در آن از توابع پایه به کار

رفته در تقریب تابع به عنوان تابع وزن استفاده می‌شود [۱۱]:

$$\begin{cases} W_i = B_i \\ V_i = -B_i \end{cases} \quad (39-1)$$

بنابراین رابطه (۲۷-۱) به صورت زیر در می‌آید:

$$\Rightarrow \int_{\Omega} B_i [F(\mathbf{u}^h) + \mathbf{b}] d\Omega - \int_{\Gamma} B_i [G(\mathbf{u}^h) - \mathbf{g}] d\Gamma = 0 \quad (40-1)$$

^۱ moment method

^۲ Yamada

^۳ Fujita

^۴ ill-conditioned

این رابطه نیز n معادله برای n ضریب a_i به دست می‌دهد که با حل آنها پاسخ تقریبی به دست می‌آید. روش گالرکین نسبت به سایر روش‌ها مزایایی دارد، از جمله: ماتریس دستگاه معادلات به دست آمده از این روش غالباً متقارن است. به علاوه در بسیاری از موارد روش گالرکین منجر به همان فرمول‌بندی به دست آمده از اصول انرژی (تغییرات) می‌شود و از این رو پایه‌های فیزیکی معینی دارد. به همین دلیل روش گالرکین تا کنون کارآمدترین روش باقیمانده وزنی شناخته شده است و به صورت گسترده در روش‌های عددی مانند روش المان محدود^۱ به کار می‌رود.

روش‌های بر مبنای شکل ضعیف به دو دسته روش‌های کلی^۲ و روش‌های محلی^۳ تقسیم می‌شوند. در روش شکل ضعیف کلی انتگرال‌گیری در کل دامنه مسئله انجام می‌شود (مانند فرمول‌بندی اصل تغییرات)، در حالی که در روش شکل ضعیف محلی انتگرال‌گیری در زیر دامنه‌های محلی برای هر گره انجام می‌شود (مانند روش زیردامنه).

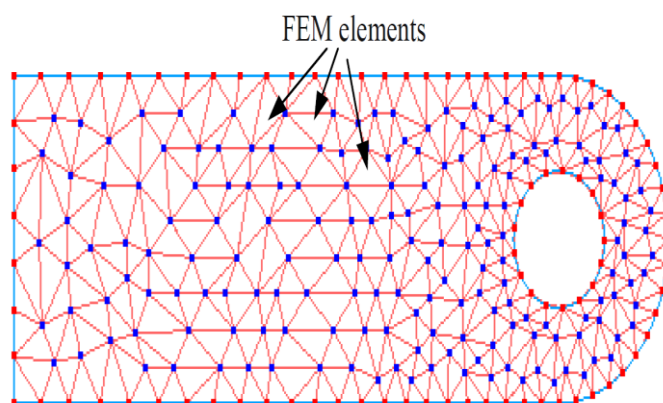
^۱ finite element method (FEM)
^۲ global weak-form
^۳ local weak-form

فصل دوم

روش‌های بدون شبکه

۱-۲- چرا روش بدون شبکه؟

روش‌های بدون شبکه در حقیقت توسعه طبیعی روش‌های با شبکه به ویژه روش المان محدود می‌باشند. ابداع و توسعه روش المان محدود در دهه ۱۹۵۰ یکی از مهمترین پیشرفت‌ها در زمینه روش‌های عددی است. در روش المان محدود یک محیط پیوسته به تعدادی از زیر ناحیه‌های متصل به هم به نام المان محدود تقسیم‌بندی می‌شود. هر المان شامل تعدادی نقطه به نام گره است که با توزیع معین در داخل یا روی مرز المان قرار گرفته‌اند. المان‌ها به وسیله یک نقشه هندسی به نام شبکه^۱ به یکدیگر متصل می‌شوند (شکل ۱-۲). در هر المان با استفاده از فرم ضعیف معادلات حاکم و با کاربرد تابع درونیاب مناسب (چندجمله‌ای‌ها) دستگاه معادلات جبری بدست می‌آید. با سوار کردن معادلات بدست آمده برای المان‌ها در یک دستگاه کلی، دستگاه معادلات کلی حاکم بر کل دامنه حل بدست می‌آید که با حل آن متغیر میدان بدست می‌آید.



شکل ۱-۲- نمایش دامنه به کمک روش FEM.

^۱ mesh

روش المان محدود روشی مقاوم، انعطاف پذیر و کاملاً توسعه یافته است و از این رو به طور گسترده در مسائل

گوناگون مهندسی به کار رفته است. در هر حال این روش نقایص ذاتی روش‌های عددی بر پایه شبکه‌بندی را دارا

می‌باشد. در زیر تعدادی از محدودیت‌های این روش ذکر شده است:

(۱) هزینه بالای تولید شبکه

تولید شبکه برای دامنه مسئله پیش‌نیاز روش المان محدود است. معمولاً بیشتر زمان یک تحلیل المان محدود به خصوص برای هندسه‌های پیچیده صرف شبکه بندی می‌شود و در اغلب موارد شبکه‌بندی نیاز به مداخله نیروی انسانی دارد. از آنجایی که نوعاً هزینه اپراتور بیشتر از هزینه زمان ماشین است، مطلوب است که فرآیند شبکه‌بندی تماماً توسط رایانه و بدون مداخله نیروی انسانی انجام شود. این امر اغلب بدون صرف نظر کردن از کیفیت المان‌ها به ویژه در مسائل با دامنه‌های پیچیده یا سه بعدی امکان پذیر نیست.

(۲) دقت پایین در مقادیر مشتق‌ها

معمولاً مقادیر مشتق‌های متغیر مسئله در مرزهای المان‌ها ناپیوسته هستند. این امر به دلیل طبیعت تکه‌ای پیوسته فرض شده برای متغیر مسئله در فرمول بندی المان محدود است. بنابراین در این روش برای رسیدن به دقت بالاتر در مقادیر مشتق‌ها نیاز به مراحل پس-فرآیندی^۱ است.

(۳) مشکل بودن تحلیل‌های انطباقی^۲

یکی از فرآیندهایی که اخیراً در تحلیل المان محدود مورد توجه قرار گرفته است اطمینان از دقت جواب است. برای این منظور فرآیند تحلیل انطباقی باید انجام شود. در تحلیل انطباقی با استفاده از روش المان محدود، بازتولید شبکه در نواحی مورد نظر مورد نیاز است. برای بازتولید شبکه لازم است که پردازشگرهای تولید شبکه پیچیده، مقاوم و تطبیق پذیر توسعه یابند. این پردازشگرها محدود به مسائل دو بعدی می‌باشند. مشکلات تکنیکی مانع توسعه پردازشگرهای بازتولید شبکه به مسائل سه بعدی می‌شوند. علاوه بر این در مسائل سه بعدی حتی در صورت دسترسی به پردازشگر بازتولید شبکه مطلوب، هزینه محاسباتی بازتولید شبکه در هر مرحله بسیار زیاد است.

(۴) محدودیت در تحلیل مسائلی از قبیل:

مکانیک جامدات:

^۱ post- processing
^۲ adaptive analysis

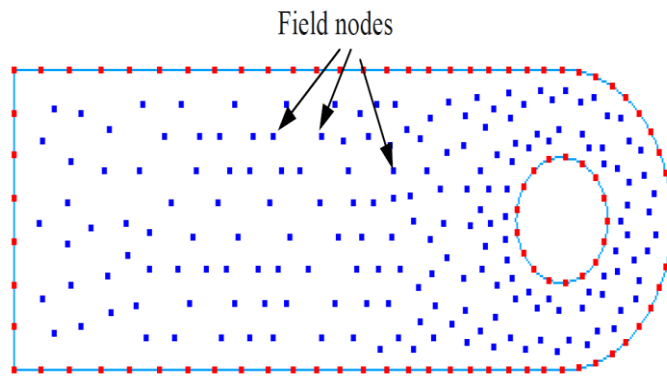
- در تغییر شکل‌های بزرگ به علت اعوجاج شکل المان‌ها کاهش قابل ملاحظه در دقت نتایج ایجاد می‌شود.
- شبیه‌سازی رشد ترک با مسیر دلخواه که الزاماً از سطح مشترک المان‌ها نمی‌گذرد مشکل است.
- شبیه‌سازی شکست با تعداد تکه‌های زیاد در مواد مشکل است. روش المان محدود بر مبنای محیط پیوسته است که در آن یک المان قابل تفکیک نیست. این امر معمولاً منجر به ایجاد خطا در مسیر شکست می‌شود.

مکانیک سیالات و انتقال حرارت:

- مسائل جریان سیال که در آنها مرزهای مشخصی برای جریان وجود ندارد.
- مسائل جابجایی.

ریشه مشکلات فوق در استفاده از المان و شبکه در مرحله فرمول‌بندی می‌باشد. طبیعتاً ایده‌رهایی از قید المان و شبکه در فرآیندهای حل عددی توسعه یافته و مفهوم روش‌های بدون شبکه شکل گرفته است. یک روش بدون شبکه روشی است که در آن برای بدست آوردن معادلات جبری حاصل از معادلات دیفرانسیل حاکم بر سیستم در کل دامنه مسئله از هیچ شبکه‌بندی از پیش تعیین شده‌ای برای گسسته‌سازی دامنه استفاده نمی‌شود. البته این یک تعریف ایده‌آل برای روش بدون شبکه است. در عمل می‌توان کلیه روش‌هایی که حداقل برای درونیایی متغیر میدان نیازی به شبکه ندارند را روش بدون شبکه دانست. توابع تقریب به وسیله مجموعه‌ای از گره‌های دلخواه تولید می‌شوند و نیازی به المان نمی‌باشد.

در روش‌های بدون شبکه مجموعه‌ای از نقاط در داخل دامنه مسئله و روی مرز آن پخش می‌شوند تا دامنه مسئله و مرزهای آن مشخص شود. این مجموعه نقاط گره‌های دامنه نامیده می‌شوند. گره‌ها تشکیل شبکه نمی‌دهند؛ یعنی برای درونیایی یا تقریب متغیر مجهول میدان در دامنه نیازی به داشتن اطلاعات یا روابط از پیش تعیین شده برای موقعیت گره‌ها نیست (شکل ۲-۲).



شکل ۲-۲- نمایش دامنه به کمک روش بدون شبکه.

روش‌های بدون شبکه کاربردهای مناسبی در حل مسائل پیدا کرده‌اند و پتانسیل خوبی برای تبدیل شدن به ابزارهای عددی قدرتمند از خود نشان داده‌اند. در هر صورت این روش‌ها هنوز در مراحل توسعه هستند و مشکلات تکنیکی فراوانی بر سر راه تبدیل شدن این روش‌ها به ابزارهایی مفید و کارآمد برای حل مسائل مهندسی پیچیده وجود دارد که باید به شیوه مناسب حل شوند.

۲-۲ - طبقه‌بندی و تاریخچه روش‌های بدون شبکه

تا کنون (به ویژه در سال‌های اخیر) روش‌های بدون شبکه زیادی پیشنهاد شده است، برای آشنایی بیشتر با این روش‌ها، آن‌ها را به شکلی ساده طبقه‌بندی کرده و پیشینه آن‌ها را بیان می‌کنیم.

۲-۲-۱- روش‌های بدون شبکه شکل قوی

در این روش‌ها از شکل قوی معادلات استفاده شده است، یعنی فرم قوی معادلات حاکم و معادلات شرایط مرزی مستقیماً به روش ترکیب در گره‌های میدان گسسته می‌شوند تا دستگاه معادلات منفصل شده سیستم بدست آید. سرآغاز این روش‌ها را می‌توان در دهه ۱۹۳۰ با توسعه روش ترکیب توسط اسلیتر (۱۹۳۴)، بارتا (۱۹۳۷)، فریزر و همکاران (۱۹۳۷)، لانکزوس (۱۹۳۸) و... دنبال کرد [۴-۱]. یکی دیگر از روش‌های بدون شبکه اولیه روش گردابه^۱ است که به وسیله چورین^۲ (۱۹۷۳) ارائه شد و بعدها توسط برنارد^۳ (۱۹۹۵) برای جریان لایه مرزی توسعه داده شد [۱۳]. ارائه و توسعه روش تفاضل محدود تعمیم یافته^۴، که در حقیقت تعمیم روش تفاضل محدود برای شبکه‌های بی‌سازمان دلخواه است، توسط ژیرالت^۵ (۱۹۷۴)، پاولین^۶ و پرون^۷ (۱۹۷۵)، اسنل^۸ و همکاران (۱۹۸۱)، لیزکا^۱ و ارکیز^۲ (۱۹۷۷، ۱۹۸۰)،

^۱ Vortex method

^۲ Chorin

^۳ Bernard

^۴ general finite difference method (GFDM)

^۵ Girault

^۶ Pavlin

^۷ Perrone

^۸ Snell

کروک^۳ و ارکیز (۱۹۸۹)، گام مهمی در توسعه روش‌های بدون شبکه محسوب می‌شود [۱۸-۱۳]. در این روش مفهوم ستاره گره‌ها، برای به دست آوردن تقریب تفاضل محدود برای گره مرکزی به وسیله بسط محلی سری تیلور با استفاده از اطلاعات مربوط به تعداد و موقعیت گره‌های موجود در هر ستاره، معرفی شده است. یکی از روش‌های بدون شبکه مشهور روش هیدرودینامیک ذره هموار^۴ است که بعضاً روش لاگرانژ آزاد^۵ نیز نامیده شده است. اغلب تحقیقات اولیه در این روش در کارهای لوسی^۶ (۱۹۷۷) و موناگان^۷ و همکاران (۱۹۸۵، ۱۹۹۲) دیده می‌شود [۲۲-۱۹]. در این روش از گره‌ها یا ذراتی که به طور نامنظم در دامنه پخش شده است استفاده می‌شود. بر خلاف اکثر روش‌های عددی به کار رفته در مسائل مکانیک سیالات که در آنها از دیدگاه اویلری استفاده می‌شود این روش از دیدگاه لاگرانژی بهره می‌برد. این روش تا کنون برای مدل کردن پدیده‌های نجومی مانند برخورد ستارگان و ابرهای غبار که در آنها مرز معینی وجود ندارد (بنز^۸، ۱۹۸۸) [۲۳]، جریان گرانشی (موناگان، ۱۹۹۵) [۲۴]، انتقال حرارت (کلییری^۹، ۱۹۹۸) [۲۵]، برخوردهای سرعت بالا (لیبرسکی^{۱۰}، ۱۹۹۱، راندلس^{۱۱}، ۱۹۹۶) [۲۶-۲۷]، انفجار و نفوذ (جی آر لیو^{۱۲} و همکاران، ۲۰۰۱، لیو^{۱۳}، ۲۰۰۳) [۲۹-۲۸] به کار رفته است. این روش در مسائل با مرز نامعین خوب جواب می‌دهد هر چند به دقت روش المان محدود نیست. اشکال اساسی این روش ناپایداری کششی، سازگار نبودن تابع تقریب در دامنه حل و دشوار بودن اعمال شرایط مرزی است. بحث دقیق در مورد برخی از پیشرفت‌های جدید در روش هیدرودینامیک ذره هموار در کتاب جی آر لیو و لیو (۲۰۰۳) آمده است [۳۰]. یکی دیگر از روش‌های بدون شبکه مهم، روش نقطه محدود^{۱۴} است که توسط اونیاته^{۱۵} و

همکاران

^۱ Liszka
^۲ Orkisz
^۳ Krok
^۴ Smooth particle hydrodynamics (SPH)
^۵ Free Lagrange method
^۶ Lucy
^۷ Monaghan
^۸ Benz
^۹ Cleary
^{۱۰} Libersky
^{۱۱} Randles
^{۱۲} GR Liu
^{۱۳} Liu
^{۱۴} Finite point method (FPM)
^{۱۵} Oñate

(۱۹۹۶، ۱۹۹۸، ۲۰۰۱) ارائه شد [۳۱-۳۳]. این روش بر مبنای فرم قوی معادلات و درونیابی به روش مینیمم

مربعات متحرک^۱ است.

روش‌های بدون شبکه شکل قوی دارای مزایایی از قبیل: الگوریتم ساده، کارایی محاسباتی بالا و واقعاً بدون شبکه

بودن هستند. با این وجود روی هم رفته در سال‌های بعد روند تحقیقات عمدتاً به سمت روش‌های بدون شبکه شکل ضعیف گرایش یافته است. این امر بخشی به علت معایب روش‌های شکل قوی مانند ناپایدار بودن، عدم مقاوم بودن و دقت پایین به ویژه برای مسائل با شرط مرزی مشتقی است. در مقابل، مقاوم‌تر بودن روش‌های بر مبنای شکل ضعیف نسبت به روش‌های شکل قوی و همچنین تمرکز تحقیقات فراوان بر روش المان محدود که از شکل ضعیف استفاده می‌کند، می‌تواند دلیل حرکت به سمت روش‌های بدون شبکه شکل ضعیف بوده باشد.

۲-۲-۲- روش‌های بدون شبکه شکل ضعیف

این روش‌ها از شکل ضعیف معادلات و شرایط مرزی حاکم استفاده می‌کنند و ممکن است به دو شکل کلی و محلی به کار گرفته شوند. از اوایل دهه ۱۹۹۰ افزایش چشمگیری در تحقیقات اختصاص یافته به روش‌های بدون شبکه شکل ضعیف کلی مشاهده می‌شود. نیرولس^۲ و همکاران (۱۹۹۲) روشی که آن را روش المان پخش شده^۳ نامیدند ارائه کردند که در آن تنها مجموعه‌ای از گره‌ها و توصیفی از مرز میدان برای فرمول‌بندی معادله گالرکین لازم است [۳۴]. توابع میانجی در این روش چند جمله‌ای‌هایی هستند که با تقریب مینیمم مربعات متحرک بر مقادیر گره‌ای منطبق می‌شوند. هرچند ظاهراً در این روش نیازی به شبکه (از نوعی که در المان محدود است) نیست، ولی هنوز هم برای محاسبه انتگرال‌ها به روش عددی، نیاز به نوعی شبکه کمکی می‌باشد که همین امر باعث می‌شود که این روش یک روش کاملاً بدون شبکه محسوب نگردد. بلیچسکو^۴ و همکاران (۱۹۹۴) در ادامه روش المان پخش شده روشی ارائه کردند که آن را روش بدون المان گالرکین^۵ نامیدند [۳۵]. در این روش جملات اضافی در مشتقات توابع درونیابی که در روش نیرولس و همکاران غیر ضروری فرض شده بود، در نظر گرفته شد. علاوه بر این برای محاسبه انتگرال‌ها از یک شبکه سلولی منظم

^۱ moving least-squares (MLS)

^۲ Nayroles

^۳ Diffuse element method (DEM)

^۴ Belytschko

^۵ Element free Galerkin (EFG)

به عنوان شبکه کمکی استفاده شد. دوارت^۱ و اودن^۲ (۱۹۹۵) و بابوشکا^۳ و ملنک^۴ (۱۹۹۵) این نوع تقریب را به عنوان زیر مجموعه‌ای از روش‌های به اصطلاح المان محدود افزاز واحد^۵ دسته بندی کرده‌اند و فرآیندهای المان محدود بهبود یافته و بدون شبکه‌ای با استفاده از درونیایی‌های مرتبه‌ای^۶ افزاز واحد ارائه کرده‌اند [۳۶-۳۷]. لیو و همکاران (۱۹۹۵) دسته متفاوتی از روش‌های بدون شبکه را ارائه کردند که بر مبنای هسته باز تولیدی و تحلیل موج بود [۳۸]. این روش، که برای بهبود روش هیدرودینامیک ذره هموار از طریق ارضای شرایط سازگاری با استفاده از تابع تصحیح ارائه شد، اصطلاحاً روش ذره‌ای هسته باز تولیدی^۷ نامیده می‌شود. این روش امکان ایجاد نوع جدیدی از توابع شکل را با استفاده از تبدیل انتگرالی پنجره‌ای^۸ فراهم می‌کند. تابع پنجره‌ای می‌تواند در دامنه انتقال و اتساع یابد و نیاز به تعریف المان را برطرف سازد.

روش‌های بدون شبکه شکل ضعیف محلی نخستین بار توسط آتلوری^۹ و همکاران (۱۹۹۸) بر مبنای معادله شکل ضعیف محلی پتروف-گالرکین و تابع شکل بدست آمده از درونیایی به روش MLS ارائه شد که اصطلاحاً روش پتروف-گالرکین محلی بدون شبکه^{۱۰} نامیده شد [۳۹،۴۰]. روش درونیایی نقطه‌ای شعاعی محلی^{۱۱} که توسط جی آر لیو و همکاران و در آن از روش درونیایی نقطه‌ای استفاده شده است، از جمله روش‌های شکل ضعیف محلی می‌باشد [۴۱]. این روش‌ها برخلاف روش‌های شکل ضعیف کلی برای انتگرال‌گیری نیازی به شبکه کمکی جداگانه ندارد و به همین علت روش‌های شکل ضعیف واقعاً بدون شبکه محسوب می‌شود.

۳-۲-۲- روش‌های بدون شبکه شکل ضعیف - قوی^{۱۲}

روش بدون شبکه شکل ضعیف-قوی که در آن از ترکیب شکل ضعیف و شکل قوی استفاده می‌شود توسط جی آر

لیو و گو^{۱۳} (۲۰۰۲، ۲۰۰۳) ارائه شده است [۴۲-۴۳]. ایده اصلی این روش این است که در

^۱ Duarte

^۲ Oden

^۳ Babuska

^۴ Melenk

^۵ Partition of unity finite element method (PUFEM)

^۶ Hierarchical

^۷ Reproducing kernel particle method (RKPM)

^۸ Integral window transform

^۹ Atluri

^{۱۰} Meshless local Petrov-Galerkin method (MLPG)

^{۱۱} Local radial point interpolation method (LRPIM)

^{۱۲} Meshfree weak-strong (MWS) form method

^{۱۳} Gu

تعیین دستگاه معادلات منفصل شده مسئله، از هر دو شکل قوی یا ضعیف برای گروه گره های مختلف که شرایط مختلفی بر آنها حاکم است استفاده می شود. شکل ضعیف محلی (به دلیل سادگی اعمال شرط مشتقی) برای تمام گره-هایی که رو و با نزدیک مرزهای با شرط مرزی مشتقی هستند به کار می رود. از شکل قوی نیز برای سایر گره ها استفاده می شود. این روش در حال حاضر تقریباً یک روش بدون شبکه ایده آل برای مسائل مهندسی است.

در همه روش های که تا اینجا شرح داده شد، گره های مورد نیاز برای انفصال معادلات در سراسر دامنه حل توزیع می شوند اما باید عنوان کرد که علاوه بر این روش ها، روش های بدون شبکه مرزی نیز وجود دارند. در این روش ها گره ها تنها روی مرزهای دامنه توزیع می شوند و هیچ گره ای در داخل دامنه وجود ندارد. معادله انتگرال مرزی به وسیله توابع گرین^۱ تعیین می شود و معادلات انفصال با استفاده از توابع شکل گره های مرزی به دست می آیند. یکی از این روش ها، روش گره مرزی^۲ ارائه شده توسط موخرجی^۳ و موخرجی (۱۹۹۷) می باشد که در آن مرز دامنه با گره هایی که به طور مناسب پخش شده اند مشخص می شود و از تقریب MLS برای تعیین توابع شکل استفاده می شود [۴۴]. این روش توسط چاتی^۴ و همکاران (۱۹۹۹، ۲۰۰۰، ۲۰۰۱) در مورد مسائل جامداتی به کار رفته و نتایج قابل قبولی گزارش شده است [۴۵-۴۷]. از آنجایی که در این روش از تقریب MLS که فاقد خاصیت دلتای کرونیگر^۵ است، استفاده می شود اعمال شرایط مرزی با دشواری مواجه می شود و چون ارضا شدن این شرایط به صورت دقیق در این روش الزامی است تعداد معادلات نسبت به روش المان مرزی^۶ دو برابر می شود که از نظر محاسباتی مقرون به صرفه نیست. روش بدون شبکه مرزی دیگر، روش معادله انتگرال مرزی محلی^۷ می باشد که توسط ژو^۸ و همکاران (۱۹۹۸) و اسلادک^۹ و همکاران (۲۰۰۲) در حل مسائل خطی و غیر خطی ارائه شد [۴۸-۵۰]. در این روش دامنه و مرز آن به وسیله گره های پخش شده مشخص می شود. برای هر گره میدان معادله انتگرال مرزی در یک دامنه محلی منظم به کار می رود. گو و جی آر لیو (۲۰۰۱، ۲۰۰۲، ۲۰۰۳) روش های درونیابی نقطه ای^{۱۰} بر مبنای توابع پایه چند جمله ای و شعاعی^{۱۱} را

^۱ Green's functions

^۲ Boundary node method (BNM)

^۳ Mukherjee

^۴ Chati

^۵ Kronecker delta function property

^۶ Boundary element method (BEM)

^۷ Local boundary integral equation (LBIE)

^۸ Zhu

^۹ Sladek

^{۱۰} Point interpolation methods (PIM)

^{۱۱} Radial basis function (RBF)

برای فرمول‌بندی دو روش بدون شبکه مرزی درونیابی نقطه‌ای مرزی^۱ و درونیابی نقطه‌ای شعاعی مرزی^۲ به کار بردند [۵۴-۵۱]. توابع شکل حاصل از این توابع پایه دارای خاصیت دلتای کرونگر می‌باشند و از نظر محاسباتی حتی نسبت به روش BEM نیز مقرون به صرفه تر می‌باشند.

۲-۳- فرآیند حل مسئله در روش‌های بدون شبکه

(۱) تعیین دامنه.

میدان حل مسئله به وسیله توزیع گره‌ها در میدان و مرزهای آن تعیین می‌شود. چگالی گره‌ها به دقت مورد نظر در مسئله بستگی دارد. توزیع گره‌ها معمولاً یکنواخت نیست. از آنجایی که الگوریتم‌های انطباق در این روش‌ها قابل استفاده هستند چگالی گره‌ها نهایتاً با تحلیل انطباقی تنظیم می‌شود و توزیع اولیه گره‌ها اهمیت چندانی ندارد.

(۲) تعیین فرم قوی یا فرم ضعیف معادلات دیفرانسیل حاکم.

برای تعیین فرم ضعیف معادلات از اصل تغییرات و یا روش باقیمانده وزنی استفاده می‌شود.

(۳) درونیابی یا تقریب تابع.

متغیر میدان در هر نقطه از دامنه مسئله تقریب زده می‌شود (به فصل ۳ مراجعه شود).

(۴) تشکیل دستگاه معادلات جبری.

با کاربرد معادلات فرم قوی یا ضعیف حاکم بر سیستم و استفاده از درونیابی مناسب برای متغیر میدان، دستگاه معادلات جبری حاصل از گسسته‌سازی میدان بدست می‌آید. این معادلات اغلب به صورت یک ماتریس برای هر گره نوشته شده و سپس این ماتریس‌های گره‌ای در ماتریس کلی مربوط به کل دامنه قرار داده می‌شوند. ماتریس دستگاه معادلات در روش‌های بدون شبکه مشابه روش المان محدود تنک^۳ و دارای پهنای باند محدود است ولی بسته به نوع روش می‌تواند نامتقارن یا متقارن باشد.

^۱ Boundary point interpolation method (BPIM)

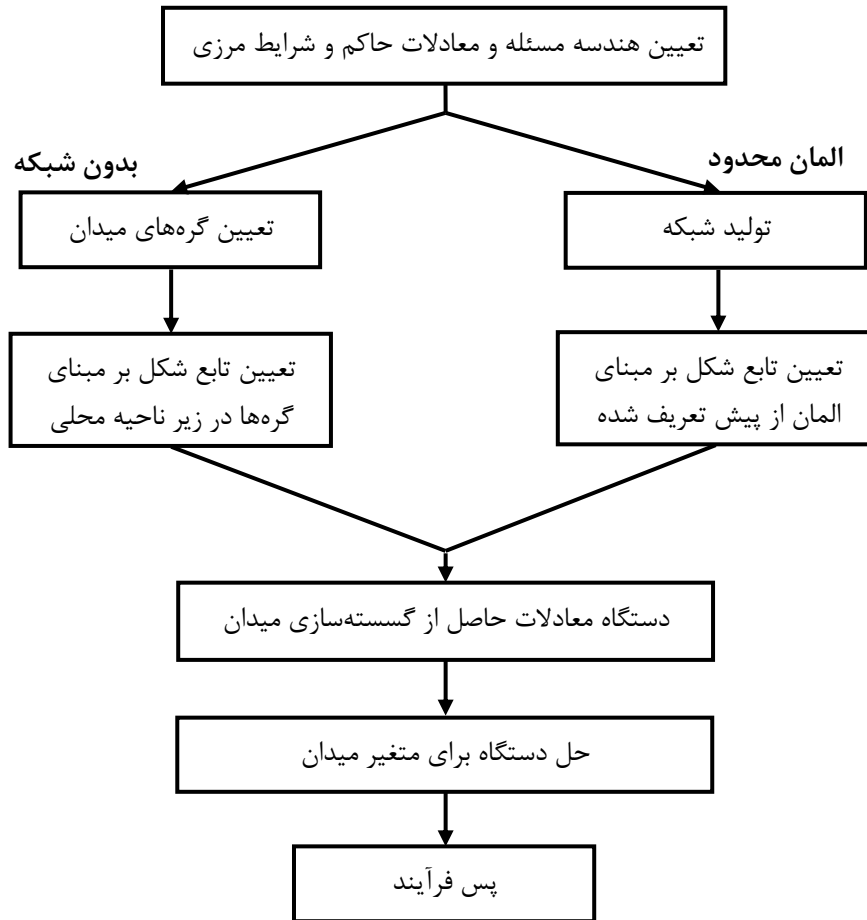
^۲ Boundary radial point interpolation method (BRPIM)

^۳ sparse

۵) حل دستگاه معادلات کلی و بدست آوردن متغیر مسئله.

با توجه به امکان نامتقارن بودن ماتریس معادلات در روش‌های بدون شبکه، الگوریتم‌های حل دستگاه معادلات با ماتریس نامتقارن مورد نیاز است.

در شکل زیر مراحل حل مسئله در روش‌های بدون شبکه بر مبنای مقایسه با روش المان محدود نشان داده شده است.



شکل ۲-۳- شمای عملیاتی در روش المان محدود و روش‌های بدون شبکه.

با توجه به نمودار فوق:

(۱) دو روش در مرحله تولید شبکه یا تعیین گره‌ها از یکدیگر جدا می‌شوند.

- (۲) تعیین توابع شکل در این دو روش متفاوت است. در روش المان محدود توابع شکل به وسیله المان‌های از پیش تعریف شده تعیین می‌شوند و توابع شکل برای سراسر المان یکسان است. در روش بدون شبکه توابع شکل تنها برای نقطه مورد نظر و بر مبنای گره‌های موجود در زیر ناحیه مربوط به آن نقطه به دست می‌آیند و می‌توانند با تغییر نقطه مورد نظر تغییر کنند (به فصل ۳ مراجعه شود).
- (۳) دو روش از مرحله تشکیل دستگاه معادلات روند یکسانی دارند.

فصل سوم

ساختار توابع شکل در روش‌های بدون شبکه

۳-۱- دامنه پشتیبانی^۱ و دامنه تاثیر^۲

همان طور که در فصل دوم اشاره شد، در راستای به دست آوردن حل تقریبی برای یک مسئله که توسط معادلات دیفرانسیل جزئی (با شرایط مرزی مشخص) قانون‌مند شده است، یکی از نیازهای اولیه که باید قبل از هر نوع فرمول-بندی مشخص شود استفاده از تابع تقریب مناسب است. در این فصل روش‌های مختلف درونیابی برای ساخت توابع شکل^۳ (که برای تولید توابع تقریبی به کار می‌روند) در روش‌های بدون شبکه توضیح داده خواهد شد. این توابع تقریبی به صورت محلی تعیین می‌شوند و به همین دلیل تنها درون یک ناحیه که شامل مجموعه‌ای از گره‌ها می‌باشد دارای مقدار هستند و در خارج از این ناحیه صفر در نظر گرفته می‌شوند. این ناحیه، دامنه پشتیبانی نامیده می‌شود. دقت درونیابی به گره‌های موجود در این ناحیه بستگی دارد و یک دامنه پشتیبانی مناسب می‌تواند دقت و کارآمد بودن تقریب را تضمین نماید. برای یک نقطه دلخواه X_Q که در مرکز دامنه پشتیبانی قرار دارد اندازه این ناحیه به صورت زیر تعیین می‌شود:

$$d_s = \alpha_s d_c \quad (۳-۱)$$

α_s ضریب بدون بعدی است که اندازه واقعی دامنه پشتیبانی را کنترل می‌کند و معمولاً با انجام آزمایش‌های

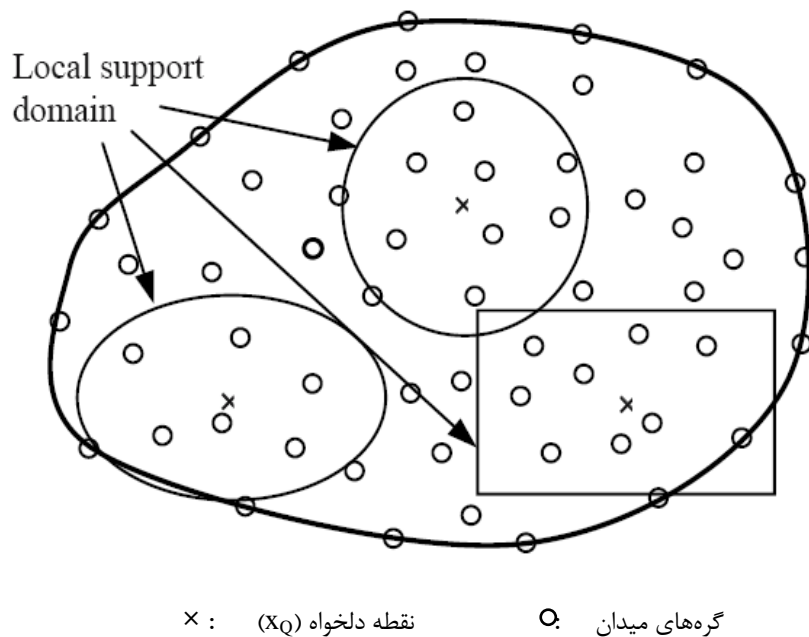
عددی تعیین می‌شود. به طور کلی انتخاب این ضریب بین ۲ تا ۳ در بسیاری از مسائل مورد مطالعه منجر به حل قابل

قبولی می‌گردد [۵۵]. d_c فاصله متوسط بین نقاط در نزدیکی نقطه X_Q می‌باشد. لازم به ذکر است که

^۱ support domain
^۲ influence domain
^۳ shape function

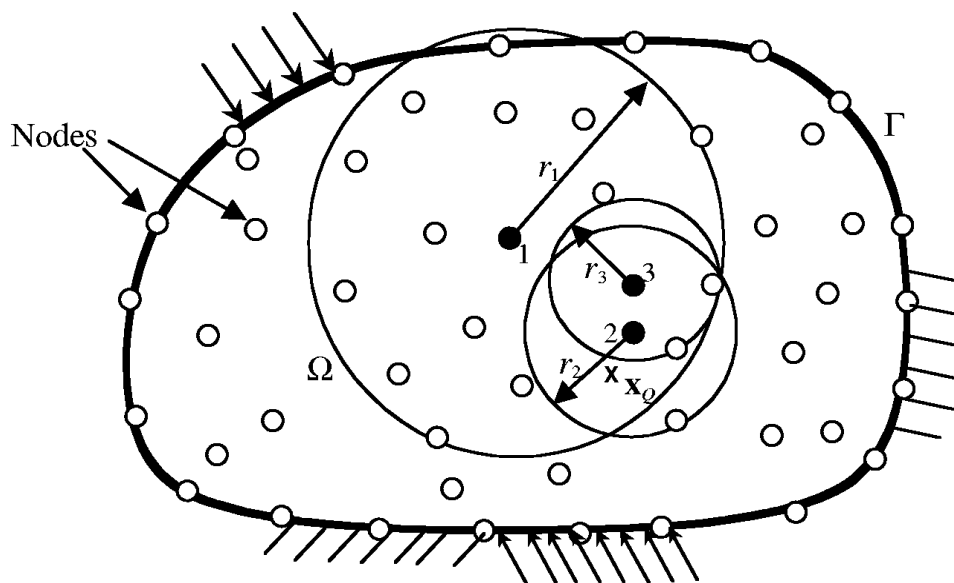
اندازه و شکل دامنه پشتیبانی می‌تواند برای هر نقطه دلخواه از میدان متفاوت باشد (شکل ۳-۱) و یا حتی اندازه

آن در یک نقطه در جهت‌های مختلف باشد ($d_{sx} = \alpha_{sx}d_{cx}$, $d_{sy} = \alpha_{sy}d_{cy}$).



شکل ۳-۱- دامنه پشتیبانی محلی برای تقریب تابع در روش‌های بدون شبکه

مفهوم دیگری که در ساخت توابع شکل به کار می‌رود، دامنه تاثیر است. چنانچه اشاره شد، دامنه پشتیبانی می‌تواند به مرکزیت هر نقطه دلخواه (حتی گره‌های میدان) بنا شود اما دامنه تاثیر تنها به مرکزیت گره‌های میدان بنا می‌شود. اصطلاحاً این گونه بیان می‌شود که: در ساختن توابع شکل برای یک نقطه دلخواه از میدان، گره‌هایی از میدان سهیم هستند که دامنه تاثیر آن‌ها شامل نقطه مورد نظر باشد. به عنوان مثال در شکل زیر در ساخت توابع شکل برای نقطه دلخواه X_Q گره‌های ۱، ۲ شرکت داشته ولی گره ۳ شرکت ندارد.



شکل ۳-۲- ناحیه تاثیر برای تقریب تابع در روش‌های بدون شبکه

استفاده از دامنه تاثیر به جای دامنه پشتیبانی دارای مزایای زیر است:

- در میدان‌هایی که توزیع گره‌ها در آن‌ها نامنظم است، دامنه تاثیر دارای عملکرد بهتری می‌باشد.
- با تغییر دادن اندازه دامنه تاثیر در گره‌های مختلف می‌توان سهم این گره‌ها را در ساخت توابع شکل در هر نقطه دلخواه، معین کرد به گونه‌ای که بعضی از گره‌ها سهم بیشتر و برخی دارای سهم کمتری باشند.
- از آنجایی که معمولاً تعداد گره‌های میدان از تعداد نقاطی که قرار است درون‌یابی در آن‌ها انجام شود کمتر است، بنابراین تعداد نواحی تاثیر از تعداد نواحی پشتیبانی نیز کمتر می‌باشد که این امر از نظر محاسباتی مناسب‌تر می‌باشد.

لازم به ذکر است که اندازه این ناحیه نیز از همان رابطه (۳-۱) تعیین می‌شود.

۳-۲- ویژگی‌های یک درونیایی ایده‌ال در روش‌های بدون شبکه

یک روش خوب برای تقریب زدن توابع در روش‌های بدون شبکه باید شرایط زیر را داشته باشد:

(۱) به اندازه کافی در برابر توزیع دلخواه و البته منطقی گره‌های میدان مقاوم باشد.

(۲) از نظر عددی پایدار باشد (پایداری).

پایداری از دو دیدگاه اهمیت دارد. اول درونیایی پایدار، یعنی این که توابع شکل ساخته شده باید نسبت به آشفتگی اندک مکان گره‌ها در دامنه پشتیبانی پایدار باشند و این امر مستلزم آن است که ماتریس مومنتوم که با استفاده از توزیع نقاط به دست می‌آید خوش حالت^۱ باشد. دیدگاه دوم مربوط به حل پایدار است به این معنی که حل عددی حاصل از توابع شکل نباید دارای نوسان‌های غیرفیزیکی باشد. در این حالت حتی ممکن است درونیایی پایدار باشد ولی به دلیل عدم تطابق طرح درونیایی (یا روش حل) با طبیعت فیزیکی مسئله، ناپایداری وجود داشته باشد. این مورد به طور چشمگیر در مسائل جابجایی غالب^۲ دیده می‌شود. در این حالت با توجه به عبارات غالب در معادلات و فیزیک مسئله، فرمولبندی (درونیایی) را به گونه‌ای تغییر می‌دهند که پایداری حاصل گردد. چنین تغییراتی تحت عنوان طرح بالا دست^۳ در کارهای سایمن^۴ و همکاران (۱۹۷۰)، ادی^۵ و بریبا^۶ (۱۹۷۴)، زینکیویکز^۷ و تیلور^۸ (۱۹۷۵، ۲۰۰۰)، کریستی^۹ و همکاران (۱۹۷۶)، بروکس^{۱۰} و هیوز^{۱۱} (۱۹۸۲)، مورتن^{۱۲} (۱۹۸۵)، اونیاته (۱۹۹۸) [۳۲]، هنریچ^{۱۳} و پپر^{۱۴} (۱۹۹۹)، لین^{۱۵} و آتلوری (۲۰۰۰، ۲۰۰۱)، عارف‌منش و همکاران (۲۰۰۵، ۲۰۰۸) و حاجی محمدی (۲۰۰۸) به چشم می‌خورد [۶۸].

^۱ well-conditioned

^۲ convection dominated problems

^۳ upwind scheme

^۴ Guymon

^۵ Adey

^۶ Brebbia

^۷ Zienkiewicz

^۸ Taylor

^۹ Christie

^{۱۰} Brooks

^{۱۱} Hughes

^{۱۲} Morton

^{۱۳} Heinrich

^{۱۴} Pepper

^{۱۵} Lin

۵۶]. نوع دیگری از ناپایداری‌های حلی به ناپایداری‌های کششی شهرت دارد که در روش SPH روی می‌دهد، بحث کامل در مورد این نوع ناپایداری در مرجع [۳۰] موجود می‌باشد.

۳) مرتبه خاصی از ثبات را ارضا نماید (ثبات^۱).

این خصوصیت مربوط به حضور یک تابع تقریب دقیق می‌باشد که باعث همگرایی روش بدون شبکه گردد.

۴) خارج از دامنه تقریب صفر باشد (فشرده‌گی^۲).

این ویژگی باعث می‌شود که دستگاه معادلات حاصل تنک بوده و به سادگی حل شود.

۵) تابع مجهولات تقریبی که با استفاده از تابع شکل به دست آمده باید برحسب روش مورد استفاده

(کلی یا محلی) در کل دامنه یا حجم کنترل محلی پیوسته باشد (سازگاری^۳).

۶) تابع شکلی ایده‌آل است که خاصیت دلتای کرونیگر^۴ داشته باشد. به این معنی که برای تقریب متغیر

میدان در هر گره از دامنه تقریب، مقدار تابع شکل در آن گره برابر یک و در سایر گره‌ها صفر باشد.

البته داشتن این ویژگی به دلیل این که روش‌های مختلفی برای اعمال شرایط مرزی اساسی^۵ وجود

دارد، چندان ضروری نیست (به فصل ۴ مراجعه شود).

۷) از نظر محاسباتی کارآمد و مقرون به صرفه باشد (کارآمد بودن^۶).

۳-۳- تکنیک‌های درونیابی در روش‌های بدون شبکه

توسعه روش‌های موثر برای ساخت توابع شکل یکی از موضوعات جذاب در تحقیقات مربوط به روش‌های بدون

شبکه محسوب می‌شود. تا کنون چندین تکنیک برای درونیابی در روش‌های بدون شبکه پیشنهاد شده است. این فرمول-

بندی‌ها را می‌توان بر حسب نوع تئوری تقریب (نمایش) تابع به سه دسته، تقریب انتگرالی، تقریب سری گونه و تقریب

مشتقی تقسیم‌بندی نمود.

۳-۳-۱- تقریب انتگرالی

تابع $u(\mathbf{x})$ در هر نقطه دلخواه از ناحیه محلی Ω (دامنه تقریب) را می‌توان به صورت زیر نمایش داد:

^۱ consistency

^۲ compact

^۳ compatibility

^۴ Kronecker delta function property

^۵ essential boundary conditions

^۶ efficiency

$$u(\mathbf{x}) = u^h(\mathbf{x}) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(\xi) \delta(\mathbf{x} - \xi) d\xi \quad (2-3)$$

که $\delta(x)$ تابع دلتای دیراک می‌باشد. این نوع تقریب از تابع هر چند دقیق است اما استفاده از آن در روش‌های عددی به علت حضور تابع دلتای دیراک و حدود انتگرال بسیار مشکل خواهد بود. از این رو تابع به کمک انتگرال وزنی و محدود زیر تخمین زده می‌شود.

$$u(\mathbf{x}) \cong u^h(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} u(\xi) W(\mathbf{x} - \xi, h) d\xi \quad (3-3)$$

که $W(x - \xi, h)$ تابع وزن یا تابع هموارساز و یا تابع هسته نامیده می‌شود، h نیز طول هموارسازی است که در واقع اندازه ناحیه تقریب یا دامنه پشتیبانی و یا دامنه تاثیر را کنترل می‌کند. برای این که این تقریب، یک تقریب همگرا (پایدار) باشد تابع وزن باید دارای شرایط زیر باشد:

- مثبت بودن: $W(\mathbf{x} - \xi, h) > 0$ inside Ω .
 - فشرده بودن: $W(\mathbf{x} - \xi, h) = 0$ outside Ω .
 - واحد بودن: $\int_{\Omega} W(\mathbf{x} - \xi, h) d\xi = 1$.
 - نزولی یکنواخت بودن.
 - رفتار تابع دلتای دیراک داشتن: $W(s, h) \rightarrow \delta(s)$ as $h \rightarrow 0$.
- این نوع تقریب در روش‌های SPH و RKPM به کار می‌رود.

۳-۳-۲- تقریب مشتقی

این درونمایی از مدت‌ها پیش در FDM و بعدها در GFDM به صورت سری تیلور استفاده شده است. در این

تکنیک برای تقریب تابع f در نقطه دلخواه x به صورت زیر عمل می‌شود:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + R_n \quad (4-3)$$

که:

$$R_n = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} (x-a)^n, \quad a \leq \xi \leq x \quad (5-3)$$

۳-۳-۳- تقریب با استفاده از سری

چنانچه می‌دانیم اگر $p_1(\mathbf{x}), p_2(\mathbf{x}), \dots$ یک مجموعه از توابع پایه متعامد واحد^۱ در یک فضا با بعد بی‌نهایت^۲

باشند، می‌توان هر تابع در این فضا را برحسب این توابع به صورت زیر بسط داد:

$$u(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{+\infty} p_i(\mathbf{x}) a_i \quad (۶-۳)$$

a_i ضرایب $p_i(\mathbf{x})$ بوده که باید تعیین شوند. اما معمولاً به جای استفاده از تمام توابع پایه متعامد واحد، از تعداد

محدودی از آن‌ها (m) استفاده می‌شود که قادرند بهترین تقریب از تابع مورد نظر را به دست دهند یعنی:

$$u(\mathbf{x}) \cong u^h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^m p_i(\mathbf{x}) a_i = \{p_1(\mathbf{x}) \quad p_2(\mathbf{x}) \quad \dots \quad p_m(\mathbf{x})\} \begin{Bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{Bmatrix} \quad (۷-۳)$$

$$= \mathbf{P}^T \mathbf{a}$$

این تقریب‌ها تاریخچه‌ای طولانی دارند به طوری که در FEM ظهور کرده و گسترش یافته‌اند و هم اکنون نیز در

روش‌های بدون شبکه با توزیع گره‌های دلخواه استفاده می‌شوند. در ادامه، روش‌های PIM، حداقل مربعات^۳، حداقل

مربعات وزنی^۴ و MLS (که در آن‌ها از این نوع تقریب استفاده می‌شود)، با جزئیات کامل شرح داده خواهند شد.

۳-۴-۳- توابع شکل درونیابی PIM

در این درونیابی که یکی از قدیمی‌ترین درونیابی‌هاست و به صورت گسترده در روش‌هایی نظیر FEM به کار رفته

است، برای تقریب تابع از مفهوم سری استفاده می‌شود. فرض کنید $u(\mathbf{x})$ یک تابع پیوسته بوده که در قلمرو Ω_s توسط

مجموعه‌ای از گره‌ها تعریف شده است. در نقطه دلخواه \mathbf{x} مقدار تابع به صورت زیر تقریب زده می‌شود:

$$u(\mathbf{x}) \cong u^h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^m p_i(\mathbf{x}) a_i = \{p_1(\mathbf{x}) \quad p_2(\mathbf{x}) \quad \dots \quad p_m(\mathbf{x})\} \begin{Bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{Bmatrix} \quad (۸-۳)$$

$$= \mathbf{P}^T \mathbf{a}$$

^۱ orthonormal

^۲ به تعداد توابع پایه مستقل خطی موجود در یک فضای تابعی، بعد آن فضا اطلاق می‌شود.

^۳ least squares (LSQ)

^۴ weighted least squares (WLS)

توابع پایه چندجمله‌ای در دستگاه مختصات $\mathbf{x}^T = [x, y]$ تعداد چندجمله‌ای‌ها و ضرایب a_i ضرایب $p_i(\mathbf{x})$ بوده

که باید تعیین شوند. $p_i(\mathbf{x})$ با استفاده از مثلث پاسکال (شکل ۳-۳) ساخته می‌شوند، به عنوان مثال برای مختصات

یک بعدی و دو بعدی توابع پایه خطی کامل به صورت زیر تعیین می‌شوند:

$$\mathbf{P}^T(\mathbf{x}) = \{1 \quad x\} \quad (1 - D) \quad (9-3)$$

$$\mathbf{P}^T(\mathbf{x}) = \{1 \quad x \quad y\} \quad (2 - D) \quad (10-3)$$

توابع پایه درجه دوم نیز به صورت زیر تعریف می‌شوند:

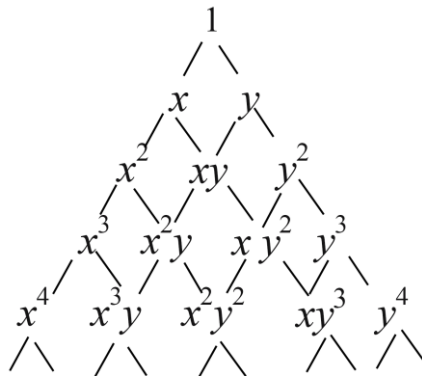
$$\mathbf{P}^T(\mathbf{x}) = \{1 \quad x \quad x^2\} \quad (1 - D) \quad (11-3)$$

$$\mathbf{P}^T(\mathbf{x}) = \{1 \quad x \quad y \quad x^2 \quad xy \quad y^2\} \quad (2 - D) \quad (12-3)$$

با تعمیم روابط بالا، برای چندجمله‌ای‌های درجه p کامل خواهیم داشت:

$$\mathbf{P}^T(\mathbf{x}) = \{1 \quad x \quad x^2 \dots x^{p-1} \quad x^p\} \quad (1 - D) \quad (13-3)$$

$$\mathbf{P}^T(\mathbf{x}) = \{1 \quad x \quad y \quad x^2 \quad xy \quad y^2 \dots x^p \quad y^p\} \quad (2 - D) \quad (14-3)$$



شکل ۳-۳- مثلث پاسکال برای توابع پایه در مختصات دو بعدی.

برای تعیین کردن ضرایب a_i ، به مرکز نقطه \mathbf{x} یک دامنه تقریب که شامل n گره از گره‌های میدان می‌باشد،

تشکیل می‌دهیم. در درونیابی PIM باید تعداد گره‌های داخل دامنه تقریب (n) با تعداد توابع پایه به کار برده شده (m)

برابر باشد ($n = m$)، به این ترتیب تابع تقریبی حاصل از تمام گره‌های موجود در دامنه

تقریب عبور خواهد کرد ($u_I = u(\mathbf{x}_I) = u^h(\mathbf{x}_I)$). با استفاده از این مطلب، رابطه (۳-۸) در هریک از گره-

های دامنه تقریب به صورت زیر در می‌آید:

$$\begin{cases} u_1 = \sum_{i=1}^m a_i p(\mathbf{x}_1) = a_1 + a_2 x_1 + a_3 y_1 + \dots + a_m p_m(\mathbf{x}_1) \\ u_2 = \sum_{i=1}^m a_i p(\mathbf{x}_2) = a_1 + a_2 x_2 + a_3 y_2 + \dots + a_m p_m(\mathbf{x}_2) \\ \vdots \\ u_n = \sum_{i=1}^m a_i p(\mathbf{x}_n) = a_1 + a_2 x_n + a_3 y_n + \dots + a_m p_m(\mathbf{x}_n) \end{cases} \quad (۳-۱۵)$$

شکل ماتریسی رابطه (۳-۱۵) به صورت زیر می‌باشد:

$$\mathbf{U}_s = \mathbf{P}_m \mathbf{a} \quad (۳-۱۶)$$

که:

$$\mathbf{U}_s = \{u_1 \quad u_2 \quad u_3 \quad \dots \quad u_n\}^T \quad (۳-۱۷)$$

$$\mathbf{a} = \{a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad \dots \quad a_n\}^T \quad (۳-۱۸)$$

$$\mathbf{P}_m = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1 y_1 & \dots & P_m(\mathbf{x}_1) \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2 y_2 & \dots & P_m(\mathbf{x}_2) \\ 1 & x_3 & y_3 & x_3 y_3 & \dots & P_m(\mathbf{x}_3) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & y_n & x_n y_n & \dots & P_m(\mathbf{x}_n) \end{bmatrix} \quad (۳-۱۹)$$

\mathbf{U}_s بردار مقادیر گره‌ای، \mathbf{a} بردار ضرایب مجهول و \mathbf{P}_m اصطلاحاً ماتریس مومنوم نامیده می‌شود. از آنجا که $n = m$

است ماتریس \mathbf{P}_m یک ماتریس مربعی (با بعد $n \times n$ یا $m \times m$) است. با حل معادله (۳-۱۵) خواهیم داشت:

$$\mathbf{a} = \mathbf{P}_m^{-1} \mathbf{U}_s \quad (۳-۲۰)$$

ضرایب \mathbf{a} که از این طریق به دست می‌آیند تا زمانی که مجموعه n گره موجود در دامنه تقریب تغییر نکند، برای هر

نقطه دلخواه داخل ناحیه، ثابت هستند. از جایگذاری رابطه (۳-۲۰) در رابطه (۳-۸) و این که $n = m$ است نتیجه می-

شود:

$$u^h(\mathbf{x}) = \mathbf{P}^T(\mathbf{x}) \mathbf{P}_m^{-1} \mathbf{U}_s = \sum_{i=1}^n \phi_i u_i = \mathbf{\Phi}^T(\mathbf{x}) \mathbf{U}_s \quad (۳-۲۱)$$

$\mathbf{\Phi}(\mathbf{x})$ بردار توابع شکل بوده و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Phi^T(\mathbf{x}) = \{\phi_1(\mathbf{x}) \quad \phi_2(\mathbf{x}) \quad \dots \quad \phi_n(\mathbf{x})\} = \mathbf{P}^T(\mathbf{x})\mathbf{P}_m^{-1} \quad (22-3)$$

به دلیل این که توابع شکل PIM به صورت چند جمله‌ای می‌باشند، مشتق مرتبه l آن‌ها به سادگی و به شکل زیر قابل محاسبه خواهد بود:

$$\Phi^{(l)}(\mathbf{x}) = \begin{Bmatrix} \phi_1^{(l)}(\mathbf{x}) \\ \phi_2^{(l)}(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ \phi_n^{(l)}(\mathbf{x}) \end{Bmatrix} = \frac{\partial^l \mathbf{P}^T(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{P}_m^{-1} \quad (23-3)$$

ویژگی‌های این توابع شکل (با صرف نظر کردن از اثبات آن‌ها) عبارتند از:

- (۱) ثبات: اگر بالاترین درجه توابع پایه چندجمله‌ای p باشد، ثبات توابع شکل حاصل از مرتبه p خواهد بود.
- (۲) توانایی بازتولید^۱: این توابع شکل قابلیت تولید هر تابعی که شامل توابع پایه باشد (نه الزاماً توابع چند جمله‌ای) را دارند.
- (۳) مستقل خطی: از آنجا که توابع پایه در دامنه تقریب مستقل خطی می‌باشند توابع شکل نیز مستقل خطی خواهند بود.
- (۴) خاصیت دلتای کرونکر: به علت این که تابع تقریب از تمام گره‌های موجود در دامنه تقریب عبور می‌کند (به دلیل برابری تعداد توابع پایه با تعداد گره‌های موجود در دامنه تقریب)، دارای خاصیت دلتای کرونکر می‌باشد یعنی:

$$\phi_i(\mathbf{x} = \mathbf{x}_j) = \begin{cases} 1 & i = j, \quad j = 1, 2, \dots, n \\ 0 & i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \dots, n \end{cases} \quad (24-3)$$

- (۵) افراز واحد: مجموع توابع شکل در هر نقطه دلخواه از دامنه تقریب برابر یک می‌باشد.

$$\sum_{i=1}^n \phi_i(\mathbf{x}) = 1 \quad (25-3)$$

- (۶) توانایی بازتولید خطی^۲: اگر توابع پایه کامل باشند خواهیم داشت:

$$\sum_{i=1}^n \phi_i(\mathbf{x})x_i = \mathbf{x} \quad (26-3)$$

- (۷) شکل چند جمله‌ای: توابع شکل و مشتقات آن‌ها دارای شکل چند جمله‌ای هستند.

- (۸) فشردگی: مقدار این توابع خارج از دامنه تقریب صفر می‌باشد.

^۱ reproducibility

^۲ linear reproducibility

۹) سازگاری: ممکن است یک نقطه دلخواه از دامنه کلی که متعلق به چند دامنه محلی تقریب است، در هر ناحیه

دارای مقادیر متفاوتی باشد به عبارت دیگر این توابع شکل به صورت کلی سازگار نیستند. علت این امر عدم

استفاده از تابع وزن زنگی شکل در درونیابی می باشد [۶۹].

رابطه (۳-۲۰) تنها در صورتی قابل قبول است که \mathbf{P}_m^{-1} وجود داشته باشد (معکوس پذیر باشد). این شرط به نحوه توزیع

گره‌ها در دامنه تقریب و توابع پایه بستگی دارد و ممکن است همواره برقرار نباشد. برای حل این مشکل دو راه حل

پیشنهاد شده است:

- استفاده از الگوریتم مثلث بندی ماتریس [۷۰-۷۱].
- استفاده از توابع پایه شعاعی به جای توابع پایه چند جمله‌ای [۵۵].

۳-۵- توابع شکل درونیابی LSQ

در این درونیابی تعداد گره‌های موجود در دامنه تقریب از تعداد توابع پایه (که معمولاً به منظور تامین ثبات تابع

شکل تا مرتبه خاص، از پیش تعیین شده‌اند). بیشتر است ($n \geq m$). به عبارت دیگر مساوی بودن تعداد توابع پایه و تعداد

گره‌های داخل دامنه تقریب که یک قید محسوب می شود در این حالت وجود ندارد. اگر برای تقریب زدن تابع $u(\mathbf{x})$ در

نقطه دلخواه \mathbf{x} از همان رابطه (۳-۸) استفاده شده و دستگاه معادلات (۳-۱۳) برای گره‌های موجود در دامنه تقریب

تشکیل شود، به دلیل این که $n \geq m$ است تعداد معادلات از تعداد مجهولات بیشتر می شود و نمی توان دستگاه را حل

کرد. به همین دلیل برای تقریب زدن تابع، از مینیمم کردن نورم تفاضلی زیر در هر دامنه تقریب استفاده می شود:

$$J = \sum_{i=1}^n [u^h(\mathbf{x}_i) - u_i]^2 \quad (۳-۲۷)$$

n تعداد گره‌های موجود در دامنه تقریب، u_i مقادیر گره‌ای و $u^h(\mathbf{x}_i)$ مقادیر تابع تقریب در گره‌های میدان هستند. با

استفاده از رابطه (۳-۸) داریم:

$$u^h(\mathbf{x}_i) = \sum_{i=1}^m p_i(\mathbf{x}_i) a_i = \{p_1(\mathbf{x}_i) \quad p_2(\mathbf{x}_i) \quad \dots \quad p_m(\mathbf{x}_i)\} \begin{Bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{Bmatrix} \quad (۳-۲۸)$$

$$= \mathbf{P}^T(\mathbf{x} = \mathbf{x}_i) \mathbf{a} = \mathbf{P}_m \mathbf{a}$$

به این ترتیب شکل ماتریسی رابطه (۳-۲۷) به صورت زیر خواهد بود:

$$J = [\mathbf{P}_m \mathbf{a} - \mathbf{U}_s][\mathbf{P}_m \mathbf{a} - \mathbf{U}_s] \quad (۳-۲۹)$$

برای به دست آوردن مجموعه ضرایبی که نورم J مینیمم می کنند، از J نسبت به \mathbf{a} مشتق گرفته می شود:

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{a}} = 0 \Rightarrow \mathbf{P}_m \mathbf{a} - \mathbf{U}_s = 0 \Rightarrow \mathbf{P}_m \mathbf{a} = \mathbf{U}_s \quad (30-3)$$

به دلیل این که \mathbf{P}_m یک ماتریس $n \times m$ بوده و معکوس پذیر نیست، طرفین رابطه (30-3) را در \mathbf{P}_m^T (که $m \times n$ است)

به گونه ای ضرب کرده تا \mathbf{A} که یک ماتریس مربعی ($m \times m$) است، حاصل شود:

$$\mathbf{P}_m^T \mathbf{P}_m \mathbf{a} = \mathbf{P}_m^T \mathbf{U}_s \quad (31-3)$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}_m^T \mathbf{P}_m \quad (32-3)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{P}_m^T \quad (33-3)$$

با جایگذاری (32-3) و (33-3) در (31-3) داریم:

$$\mathbf{A} \mathbf{a} = \mathbf{B} \mathbf{U}_s \quad (34-3)$$

با حل معادله فوق خواهیم داشت:

$$\mathbf{a} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{U}_s \quad (35-3)$$

با جایگذاری (35-3) در (33-3) خواهیم داشت:

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{x}) = \mathbf{P}^T(\mathbf{x}) \mathbf{a} = \mathbf{P}^T(\mathbf{x}) \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{U}_s = \Phi^T \mathbf{U}_s \quad (36-3)$$

$\Phi(\mathbf{x})$ بردار توابع شکل بوده و به صورت زیر تعریف می شود:

$$\Phi^T(\mathbf{x}) = \{\phi_1(\mathbf{x}) \quad \phi_2(\mathbf{x}) \quad \dots \quad \phi_n(\mathbf{x})\} = \mathbf{P}^T(\mathbf{x}) \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \quad (37-3)$$

در این حالت نیز ضرایب \mathbf{a} برای هر نقطه دلخواه داخل دامنه تقریب ثابت هستند (مادامی که توزیع گره ها و توابع پایه

داخل ناحیه تغییر نکنند).

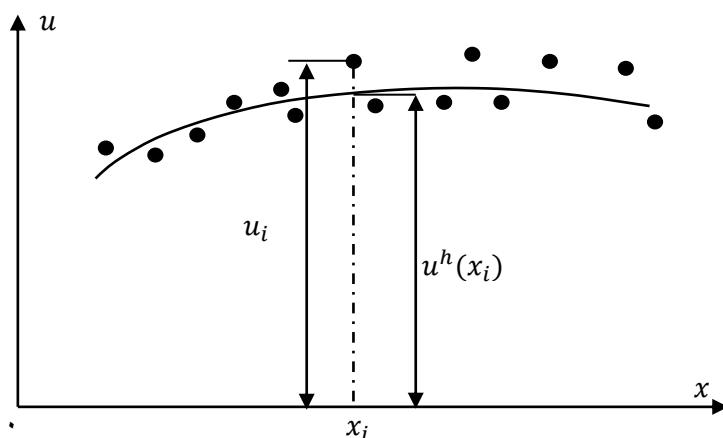
ویژگی های این توابع شکل دقیقاً مشابه توابع شکل درونیایی PIM می باشد با این تفاوت که در این توابع شکل به علت

بیشتر بودن تعداد گره ها از تعداد توابع پایه، تابع تقریب حاصل از این درونیایی از تمام گره ها عبور نمی کند و خاصیت

دلتای کرونگر را ندارد (شکل 3-4). اگر $m = n$ باشد، آن گاه ماتریس \mathbf{P}_m مربعی بوده و این توابع شکل با توابع شکل

درونیایی PIM یکسان خواهند بود زیرا:

$$\begin{aligned} \Phi^T(\mathbf{x}) &= \mathbf{P}^T(\mathbf{x}) \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} = \mathbf{P}^T(\mathbf{x}) (\mathbf{P}_m^T \mathbf{P}_m)^{-1} \mathbf{P}_m^T = \mathbf{P}^T(\mathbf{x}) \mathbf{P}_m^{-1} (\mathbf{P}_m^T)^{-1} \mathbf{P}_m^T \\ &= \mathbf{P}^T(\mathbf{x}) \mathbf{P}_m^{-1} \end{aligned} \quad (38-3)$$



شکل ۳-۴- تابع تقریب و مقادیر گره‌ای در درونیابی LSQ.

۳-۶- توابع شکل درونیابی WLS

در این درونیابی تمام شرایط مشابه شرایط درونیابی LSQ می‌باشد ولی به جای مینیمم کردن نورم (۳-۲۷)، نورم

وزنی زیر مینیمم می‌شود:

$$J_k = \sum_{i=1}^n W_k(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_k) [u^h(\mathbf{x}_i) - u_i]^2 \quad (3-39)$$

\mathbf{x}_k مختصات نقطه مرکزی دامنه تقریب، \mathbf{x}_i مختصات سایر گره‌های موجود در دامنه تقریب، n تعداد گره‌های موجود در

دامنه تقریب و W_k تابع وزن در گره k (مرکز دامنه تقریب) است و برای این که توابع شکل حاصل از این درونیابی

پیوسته و هموار باشند باید دارای شرایط زیر باشد:

۱. درون دامنه تقریب مثبت باشد یعنی: $W_k(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_k) > 0$.
۲. بیرون دامنه تقریب صفر باشد: $W_k(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_k) = 0$.
۳. در گره \mathbf{x}_k دارای بیشترین مقدار مثبت بوده (مقدار یک ایده‌آل است) و با فاصله گرفتن از این نقطه به طور یکنواخت به صفر میل کند (زنگی شکل یا دارای توزیع گوسی).
۴. به اندازه کافی به ویژه روی مرزهای دامنه تقریب هموار باشد.

با توجه به ویژگی‌های ذکر شده می‌توان توابع مختلفی را به عنوان تابع وزن انتخاب نمود که متداول‌ترین آن‌ها عبارتند از:

- تابع وزن نمایی:

$$W_i(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) = \frac{e^{-\left(\frac{|\mathbf{x}-\mathbf{x}_i|}{c}\right)^2} - e^{-\left(\frac{r_s}{c}\right)^2}}{1 - e^{-\left(\frac{r_s}{c}\right)^2}} \quad (40-3)$$

r_s نصف اندازه دامنه تقریب، $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i|$ فاصله بین \mathbf{x} و \mathbf{x}_i و c ثابتی است که با آزمایش‌های عددی تعیین می‌شود. در برخی مراجع این تابع به صورت زیر بیان شده است:

$$W_i(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) = \begin{cases} e^{-\left(\frac{r_i}{c}\right)^2} & r_i \leq 1 \\ \cdot & r_i > 1 \end{cases} \quad (41-3)$$

که:

$$r_i = \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i|}{r_s} \quad (42-3)$$

- تابع وزن زبانه‌ای^۱ درجه سه:

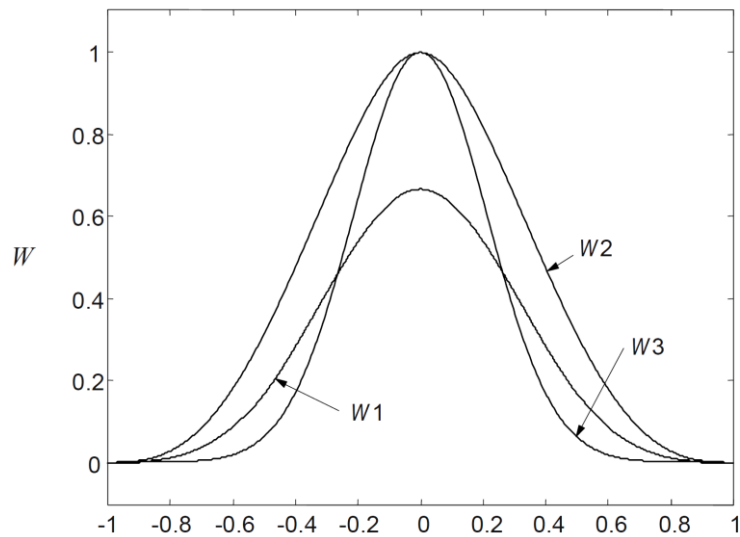
$$W_i(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) = \begin{cases} \frac{2}{3} - 4r_i^2 + 4r_i^3 & r_i \leq 0.5 \\ \frac{4}{3} - 4r_i + 4r_i^2 - \frac{4}{3}r_i^3 & 0.5 < r_i \leq 1 \\ \cdot & r_i > 1 \end{cases} \quad (43-3)$$

- تابع وزن زبانه‌ای درجه چهار:

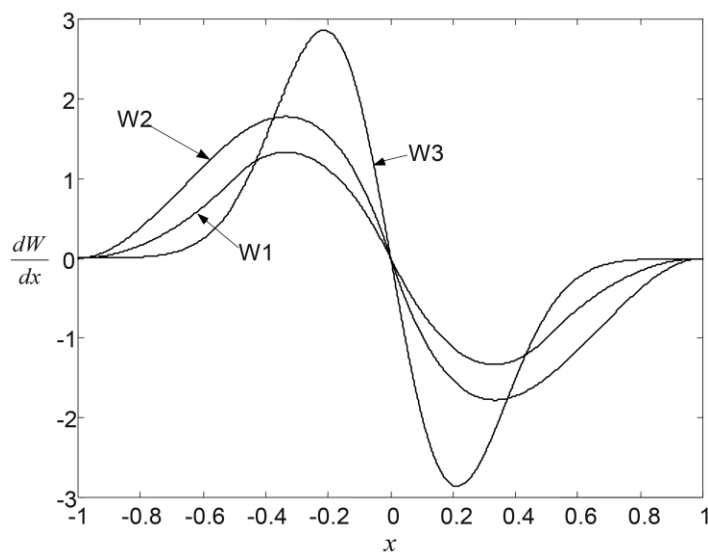
$$W_i(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) = \begin{cases} 1 - 6r_i^2 + 8r_i^3 - 3r_i^4 & r_i \leq 1 \\ \cdot & r_i > 1 \end{cases} \quad (44-3)$$

در روابط (۴۳-۳) و (۴۴-۳) r_i مشابه (۴۲-۳) تعریف می‌شود. در نمودارهای زیر این توابع وزن در حالت یک بعدی در دامنه تقریب گسترش یافته در فاصله $1 \leq x \leq -1$ به همراه مشتق اول آن‌ها رسم شده است.

^۱ spline



شکل ۳-۵- توابع وزن. W_1 : زبانه‌ای درجه ۳، W_2 : زبانه‌ای درجه چهار، W_3 : نمایی ($c = 0.3$)



شکل ۳-۶- مشتق توابع وزن. W_1 : زبانه‌ای درجه ۳، W_2 : زبانه‌ای درجه چهار، W_3 : نمایی ($c = 0.3$).

اگر چه تابع نمایی با ضابطه (۳-۴۱) و مشتقات آن روی مرزهای دامنه تقریباً دقیقاً صفر نیستند اما این مقادیر بسیار

کوچک بوده و در فرآیندهای عددی به ویژه در دامنه‌های تقریب بزرگ تولید خطای چندانی نخواهد کرد

. با مشتق گیری از رابطه (۳-۳۹) نسبت به \mathbf{a} و تکرار مراحل نظیر آنچه در مورد درونیایی LSQ انجام شد، خواهیم داشت:

$$\mathbf{a} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{U}_s \quad (۳-۴۵)$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}_m^T \mathbf{W} \mathbf{P}_m \quad (۳-۴۶)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{P}_m^T \mathbf{W} \quad (۳-۴۷)$$

که \mathbf{W} ماتریس تابع وزن بوده و به شکل زیر تعریف می شود:

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} W_k(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_k) & \cdots & \cdot \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \cdot & \cdots & W_k(\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_k) \end{bmatrix} \quad (۳-۴۸)$$

با جایگذاری (۳-۴۵) در (۳-۴۸) خواهیم داشت:

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{x}) = \mathbf{P}^T(\mathbf{x}) \mathbf{a} = \mathbf{P}^T(\mathbf{x}) \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{U}_s = \Phi^T \mathbf{U}_s \quad (۳-۴۹)$$

$\Phi(\mathbf{x})$ بردار توابع شکل بوده و به صورت زیر تعریف می شود:

$$\Phi^T = \{\phi_1(\mathbf{x}) \quad \phi_2(\mathbf{x}) \quad \dots \quad \phi_n(\mathbf{x})\} = \mathbf{P}^T(\mathbf{x}) \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \quad (۳-۵۰)$$

در این حالت نیز ضرایب \mathbf{a} برای هر نقطه دلخواه داخل دامنه تقریب ثابت هستند (مادامی که توزیع گره‌ها و توابع پایه داخل ناحیه تغییر نکنند). ویژگی‌های این توابع شکل نیز مانند ویژگی‌های توابع شکل LSQ می باشد با این تفاوت که در این حالت، حضور تابع وزن با ویژگی‌های ذکر شده سبب می شود که میزان نرم به دست آمده برای هر گره در خود آن گره اهمیت بیشتری پیدا نماید (در حالی که در درونیایی LSQ برای همه گره‌ها یک نرم تعیین می شود) و باعث سازگاری بیشتر تابع تقریب در کل دامنه و بهبود خاصیت دلتای کرونکر (دقیق تر شدن تقریب) می گردد.

۳-۷- MLS توابع شکل درونیایی

این درونیایی که به طور گسترده در روش‌های بدون شبکه استفاده می شود مانند درونیایی WLS بوده با این تفاوت که بر خلاف درونیایی WLS که در آن تابع وزن تنها در یک گره مشخص (\mathbf{x}_k یا مرکز دامنه تقریب) تعریف می شود، در این درونیایی تابع وزن در هر نقطه دلخواه از دامنه تقریب تعریف می شود به عبارت دیگر تابع وزن روی دامنه تقریب حرکت می کند و به همین دلیل این درونیایی به حداقل مربعات متحرک شهرت دارد (شکل ۳-۶). بنابراین برای پیدا کردن ضرایب مجهول \mathbf{a} باید همان نرم (۳-۳۹) را مینیمم نمود با این تفاوت که در این حالت، \mathbf{x}_k می تواند مختصات هر نقطه دلخواهی در دامنه تقریب باشد:

$$J_k = \sum_{i=1}^n W_k(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_k) [u^h(\mathbf{x}_i) - u_i]^2 \quad (51-3)$$

اما از آنجا که تعریف کردن تابع وزن در هر نقطه دلخواه از دامنه تقریب از نظر محاسباتی مقرون به صرفه نیست، تابع وزن تنها برای گره‌ها (\mathbf{x}_i) تعریف شده و مقدار آن در هر نقطه دلخواه (\mathbf{x}_k) محاسبه می‌شود یعنی:

$$W_k(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_k) = W_i(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_i) \quad (52-3)$$

استفاده از تقریب چنانچه از شکل (3-6) مشخص است نه تنها خطای چندانی ایجاد نخواهد نمود بلکه در حالی که فاصله گره‌ای¹ یکسان باشد با حالت اصلی، هیچ گونه تفاوتی ندارد. با استفاده از رابطه فوق داریم:

$$J(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n W_i(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_i) [u^h(\mathbf{x}_i) - u_i]^2 \quad (53-3)$$

با انجام عملیاتی مشابه آنچه در مورد درونیابی LSQ و WLS انجام شد، نهایتاً خواهیم داشت:

$$\mathbf{a} = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{U}_s \quad (54-3)$$

که:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{P}_m^T \mathbf{W} \mathbf{P}_m \quad (55-3)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \mathbf{P}_m^T \mathbf{W} \quad (56-3)$$

که \mathbf{W} ماتریس تابع وزن (و متعاقباً ماتریس‌های \mathbf{A} و \mathbf{B}) در این حالت تابعی از \mathbf{x} بوده و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} W_1(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_1) & \cdots & \cdot \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \cdot & \cdots & W_n(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_n) \end{bmatrix} \quad (57-3)$$

با جایگذاری رابطه (3-54) در (3-58) تابع تقریب و توابع شکل به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$u^h(\mathbf{x}) = \mathbf{P}^T(\mathbf{x})\mathbf{a} = \mathbf{P}^T(\mathbf{x})\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{U}_s = \Phi^T \mathbf{U}_s \quad (58-3)$$

$$\Phi^T = \{\phi_1(\mathbf{x}) \quad \phi_2(\mathbf{x}) \quad \dots \quad \phi_n(\mathbf{x})\} = \mathbf{P}^T(\mathbf{x})\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{B}(\mathbf{x}) \quad (59-3)$$

در این درونیابی ضرایب \mathbf{a} تابع \mathbf{x} می‌باشند، یعنی، برای هر نقطه در دامنه تقریب مقادیر متفاوتی خواهند داشت. ویژگی-

های توابع شکل حاصل از این درونیابی مانند توابع شکل WLS می‌باشد با این تفاوت که به دلیل حرکت تابع وزن روی

دامنه تقریب، تابع تقریب به صورت کلی سازگار خواهد بود. از این رو این درونیابی بر خلاف درونیابی‌های دیگر برای

استفاده در روش‌های بدون شبکه کلی نیز مناسب است. همچنین توابع شکل

